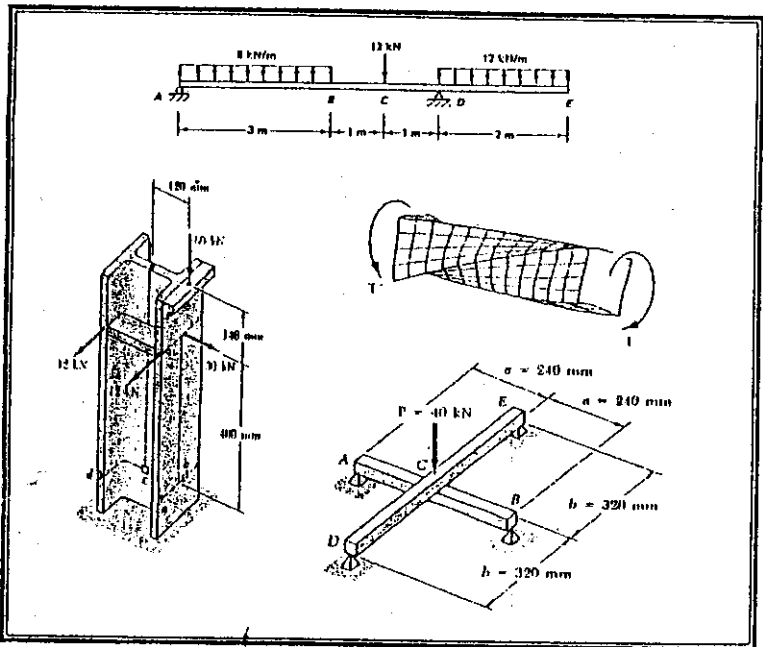




ECOLE HASSANIA DES TRAVAUX PUBLICS

RESISTANCE DES MATERIAUX

M. Azmi et K. Lahlou



1^o année génie civil

Edition 2005



ECOLE HASSANIA DES TRAVAUX PUBLICS

Cours: Résistance des matériaux (64 heures)

Professeur: M. AZMI

OBJECTIFS DU COURS:

A l'issue de ce cours, les élèves-ingénieurs doivent être capables de comprendre le fonctionnement mécanique de structures simples et déterminer les actions qui les sollicitent pour en étudier le dimensionnement et la vérification au sens de la résistance, de la rigidité et de la stabilité en relation avec les matériaux qui les constituent. Le cours est illustré de nombreuses applications numériques.

PROGRAMME DU COURS:

1. INTRODUCTION
2. CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS
3. EFFORT NORMAL --- SYSTEMES RETICULES
4. FLEXION (simple, déviée, composée)
5. EFFORT TRANCHANT - CISAILLEMENT
6. TORSION
7. DEFORMATION DES POUTRES : FLECHES
8. FLAMBEMENT

SUPPORTS DU COURS:

- Extraits de photocopiés (cours, exercices, tableaux...)
- Transparents
- Travaux pratiques (différés)

MODALITES D'EVALUATION:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| - Contrôles inopinés | % |
| - Contrôles annoncés | % |
| - Devoirs à la maison | % |
| - Assiduité et participation au cours | % |

Avant-propos:

L'objectif de ce photocopié de résistance des matériaux est de mettre à la disposition des élèves-ingénieurs un support structuré leur facilitant le suivi et la compréhension du cours en classe. Toutefois celui-ci ne dispense pas d'une assistance et d'une participation active au cours.

Ces notes de cours n'ont pas encore atteint leur forme définitive, la collaboration de tous est sollicitée pour apporter les corrections et les compléments nécessaires. Dans cette édition des passages sont repris directement de Lefebvre (1992) et Morisset (1985)

Références:

- D. Lefebvre (1992) "Statique et résistance des matériaux", département de génie civil, faculté des sciences appliquées, université de Sherbrooke.
- A. Morisset (1985) "Résistance des matériaux", Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France.
- F. Frey (1990) "Analyse des structures et milieux continus : Statique appliquée", Traité de génie civil de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, volume 1.
- F. Frey (1994) "Analyse des structures et milieux continus : Mécanique des structures", Traité de génie civil de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, volume 2.
- ✓ A. Bazergui, T. Bui-Quoc, A. Biron, G. McIntyre & C. Laberge (1987) "Résistance des matériaux", édition de l'Ecole polytechnique de Montréal.
- A. Hmimiz "Notes de cours de résistance des matériaux", Ecole Hassania des Travaux Publics

INTRODUCTION

STRUCTURE = Élément essentiel de l'architecture

protection contre les intempéries

L'Homme façonne des matériaux
pour que
structure tienne debout
malgré

attraction terrestre et forces dangereuses
(vent, foudre, feu, séismes..)

Beauté de la construction implique d'autres contraintes à supporter

Théories scientifiques inexistantes

⇒ construire par intuition et ensuite expériences

Bois résiste à la traction → éléments horizontaux (couvertures)

Bois résiste à la compression → éléments verticaux (piliers)

La pierre résiste seulement à la compression → éléments verticaux (piliers)

Forme de voûte → arc en pierre (compression) → permettre des grands espaces

Avec théories scientifiques l'intuition est toujours présente

→ comprendre pourquoi et comment les forces travaillent dans une structure

FONCTION DE LA STRUCTURE

Structure est construite pour une fonction bien définie

Construction fermée : habitation, travail, regroupement, soins...

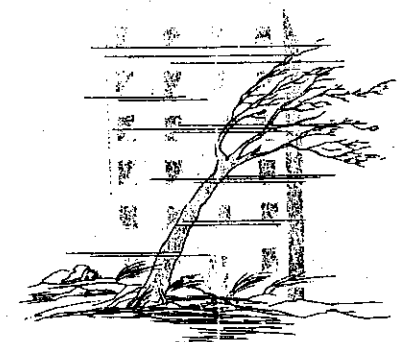
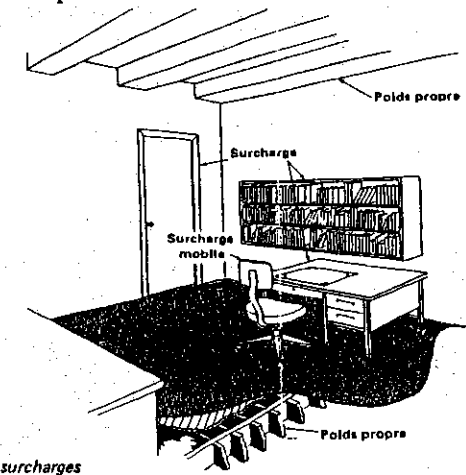
Ponts, ascenseurs : relier deux points entre eux

Barrages, murs de soutènement : résister à l'action de forces naturelles.

Fonction d'une structure

protection totale ou partielle de l'espace contre les intempéries

∇ la structure elle est soumise à des actions diverses
auxquelles elle doit **RÉSISTER**



OBJECTIFS DE LA RDM

Objectif principal

Étude du *comportement* d'éléments de structures sollicités par des efforts extérieurs.

RDM consiste à déterminer les efforts internes et les contraintes dans un solide soumis à des actions extérieures

Problème:

Trouver la relation entre actions extérieures et contraintes / déformations

Toute étude en RDM est effectuée afin de:

- soit déterminer la charge admissible d'une structure çàd reconnaître si cette structure est capable de résister aux efforts extérieurs: c'est la VERIFICATION ou L'ANALYSE
- soit dimensionner une structure pour résister avec sécurité aux charges prévues: c'est la CONCEPTION

La RDM est un domaine complexe car les facteurs intervenants dans le comportement des éléments à étudier sont nombreux et variés.

- nature et comportement des matériaux
- charges (statiques, dynamiques, thermiques...); (concentrées, réparties, uniaxiales; biaxiales...)
- types d'éléments (barres, poutres, plaques, coques, tubes...)

Mais la complexité est simplifiée par les hypothèses qui accompagnent l'étude de la RDM

Objectif général

Calculer en s'appuyant sur les lois de l'équilibre et les lois de comportement des matériaux, les contraintes et les déformations dans des éléments structuraux rencontrés en génie civil soumis à des efforts axiaux, efforts tranchants moments fléchissants, moments de torsion

Objectifs spécifiques

En examinant une structure on devra se poser quelques questions et être capable d'y répondre:

- Comment peut-on représenter schématiquement la structure étudiée?
- Quelles sont les charges et les forces qui agissent sur la structure, comment les représente-t-on? Et comment se transmettent-elles à travers toute la structure?
- Comment la structure résiste-t-elle et pourquoi?
- Comment la structure se déforme-t-elle sous le chargement?
- Comment et pourquoi peut-elle se rompre, quels sont les éléments les plus sollicités de la structure?
- Est-elle sécuritaire?...

A la fin de ce cours l'étudiant(e) devra être capable de:

- connaître les concepts de charge, force, moment, inertie, corps déformable
- Calculer les centroïdes et les moments d'inertie de surfaces quelconques
- Appliquer les principes fondamentaux de l'équilibre des corps solides pour déterminer les efforts inconnus dans des systèmes isostatiques simples: (réactions aux appuis, efforts internes dans une section donnée (N, V, M, T))
- Déterminer les contraintes et les déformations en des points caractéristiques d'une structure sollicitée en traction, compression, torsion et flexion
- Connaître les relations entre les charges appliquées, l'effort tranchant et le moment fléchissant.
- Tracer les diagrammes de N, V, M et T et interpréter ces diagrammes.
- Calculer la déformée des poutres simples.
- Comprendre le concept de stabilité des colonnes en compression et calculer la charge critique de flambement.

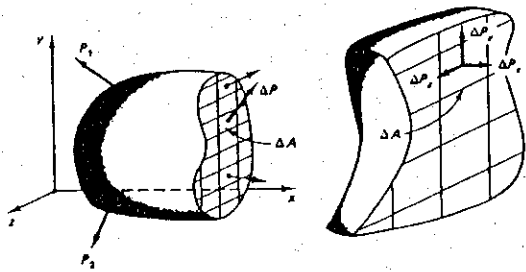


Figure 1.1 Corps libre

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A}$$

$$\tau_{yx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A}$$

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$$

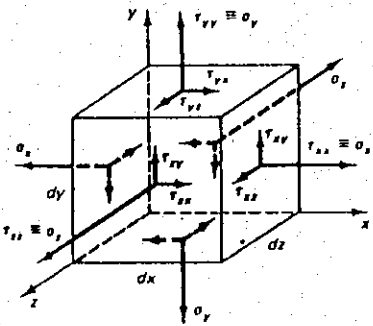


Figure 1.2 État général des contraintes

$$\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

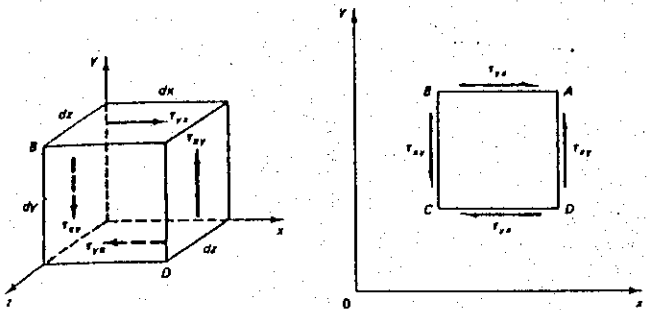


Figure 1.3 Cisaillement pur

- La déformation longitudinale (linéaire) ϵ qui est un allongement ou un rétrécissement par unité de longueur.

$$\epsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0}$$

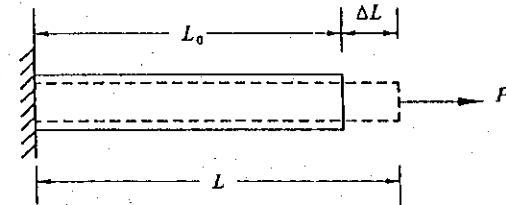


Figure 1.4 Déformation linéaire

- La déformation transversale (angulaire) γ qui est le changement d'angle (en radians) d'un angle initialement droit.

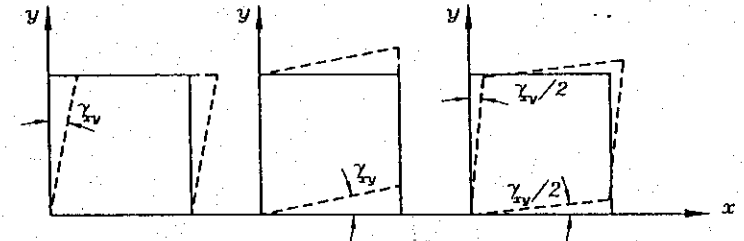


Figure 1.5 Déformation angulaire

En un point donné, représenté par un cube élémentaire, il existe neuf déformations dont six différentes. Le tenseur des déformations est donné par :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \epsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

Contrainte et principe d'équivalence

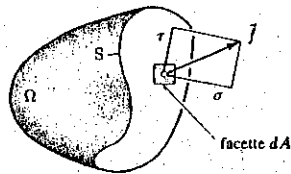


Fig. 1.1 Concept de contrainte.

Sur toute facette dA d'une coupe naît une force de surface \vec{f} appelée vecteur contrainte qui admet une composante normale à la facette σ appelée contrainte normale et une composante tangentielle τ appelée contrainte tangentielle. Ces contraintes sont des forces par unité de surface et il est préférable de les remplacer par des forces en les multipliant par des aires.

Force normale : $N = \sigma dA$

Force tangente : $V = \tau dA$

Application aux poutres :

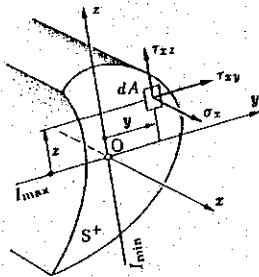


Fig. 1.2 Contraintes sur la section droite d'une poutre.

La projection des contraintes σ et τ suivant le repère (x, y, z) donne les composantes suivantes : $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$.

Par le principe d'équivalence ces contraintes se réduisent en des efforts intérieurs concentrés au point O qui sont $N, V_y, V_z, T (=M_x), M_y$ et M_z . Si A désigne l'aire de la section droite de la poutre, ces efforts intérieurs sont reliés aux contraintes par les égalités suivantes :

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (\text{effort normal})$$

$$V_y = \int_A \tau_{xy} dA \quad (\text{effort tranchant suivant } y)$$

$$V_z = \int_A \tau_{xz} dA \quad (\text{effort tranchant suivant } z)$$

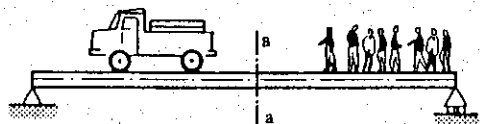
$$T = -\int_A \tau_{xy} z dA + \int_A \tau_{xz} y dA \quad (\text{moment de torsion})$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA \quad (\text{moment de flexion suivant } y)$$

$$M_z = -\int_A \sigma_x y dA \quad (\text{moment de flexion suivant } z)$$

FACTEURS DE FORCE

Forces extérieures données:

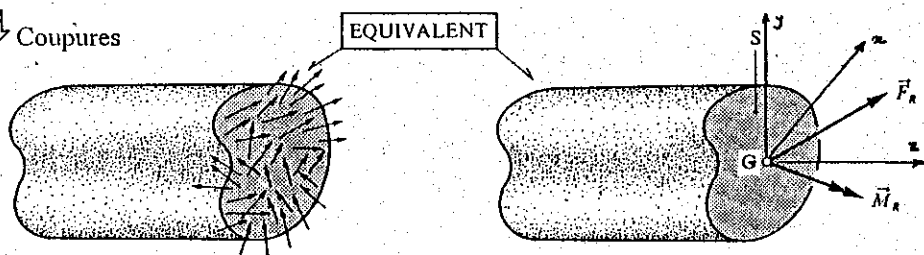


↓ Equations d'équilibre (systèmes isostatiques)

Forces extérieures de liaison:



↓ Coupures



Forces intérieures connues par les résultantes générales \vec{F}_R et \vec{M}_R

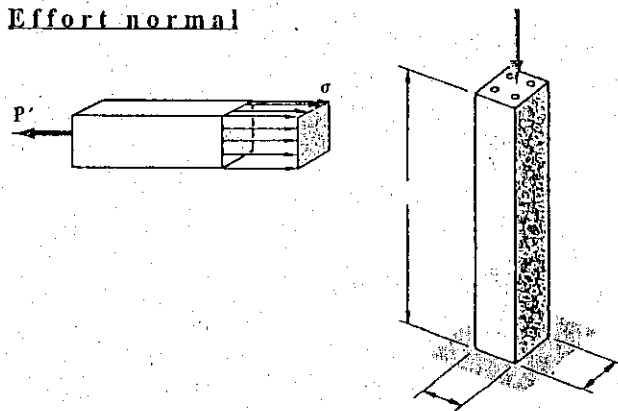
Dans un système d'axes lié à la section:

$$\vec{F}_R = \begin{cases} F_x \text{ effort tranchant} \\ F_y \text{ effort tranchant} \\ F_z \text{ effort normal} \end{cases}$$

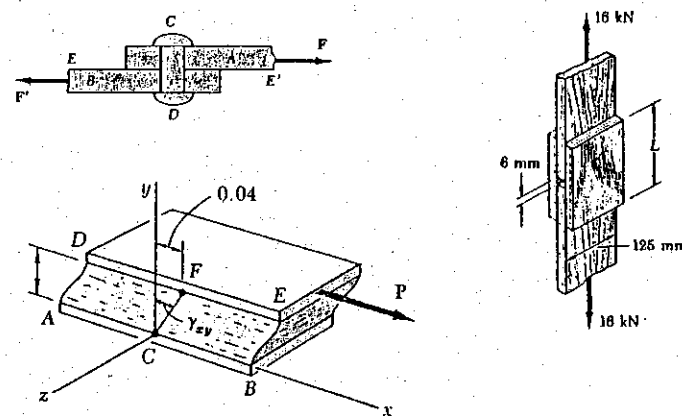
$$\vec{M}_R = \begin{cases} M_x \text{ moment de flexion} \\ M_y \text{ moment de flexion} \\ M_z \text{ moment de torsion} \end{cases}$$

FACTEURS DE FORCE

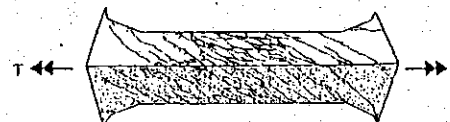
Effort normal



Cisaillement

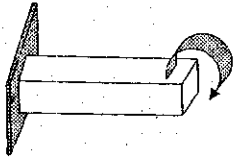


Torsion

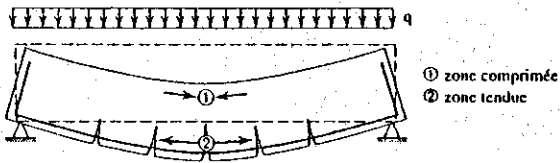


FACTEURS DE FORCE

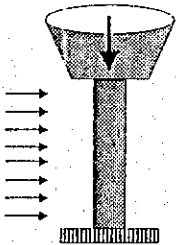
Flexion pure



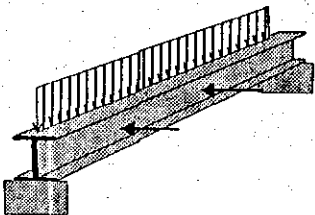
Flexion simple



Flexion composée



Flexion déviée



Exercices

1. Un tube coudé dans le plan vertical (y,z) est soumis à l'action de deux forces parallèles à x . Déterminer les facteurs de forces au point O. (Figure 1).
2. Un support métallique est chargé par deux forces Q_1 et Q_2 . La force Q_1 agit à 30° dans un plan parallèle à (y,z) . Déterminer les facteurs de forces au point O. (Figure 2).
3. Sur un contrefort trapézoïdal plan en béton armé, de 1 m d'épaisseur, agissent trois actions q , Q et le poids propre (voir figure 3). Trouver les composantes de la force résultante de ce système plan de forces. $\gamma_{\text{béton}} = 25 \text{ kN/m}^3$
4. L'axe d'un moteur est soumis à une force axiale de 600 N et à un couple de 125 N.m. Le moteur d'une masse de 75 kg, est monté sur un support fixé en O. Le centre de masse du moteur est dans le plan vertical (y,z) . Le support est un profilé en acier de 70 cm de long et de 800 N de poids. Déterminer les facteurs de forces au point O. (Figure 4).
5. Sur la manivelle d'un treuil s'exerce la force verticale $F=500 \text{ N}$. Le tambour a un diamètre de 16 cm. Sur le câble situé à 10 cm du plan (x,z) agit une force de traction T parallèle à x . Les paliers A et B ne peuvent exercer que des forces situées dans des plans verticaux parallèles à (x,z) . Le treuil étant en équilibre, calculer la force T et les composantes des forces exercées aux paliers (réactions). (Figure 5).

* COMPLEMENTS *

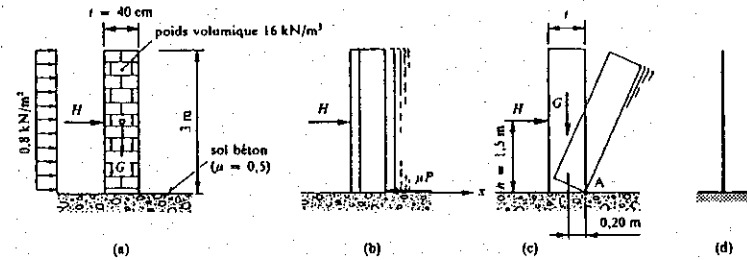
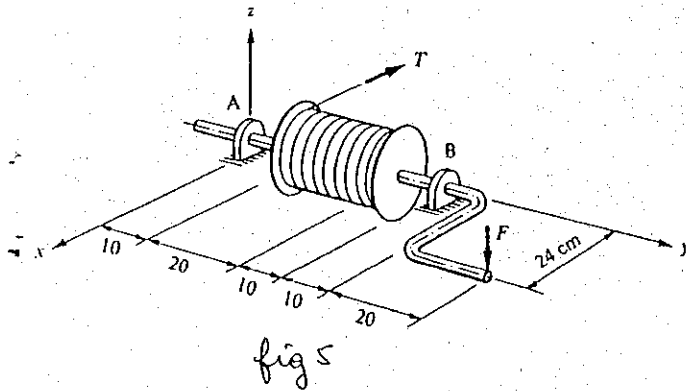
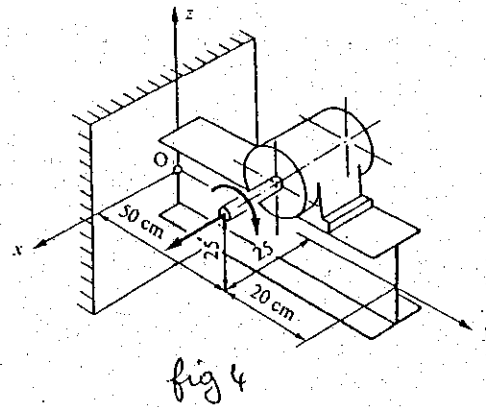
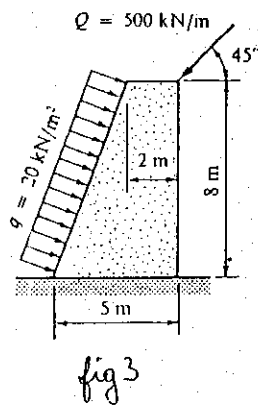
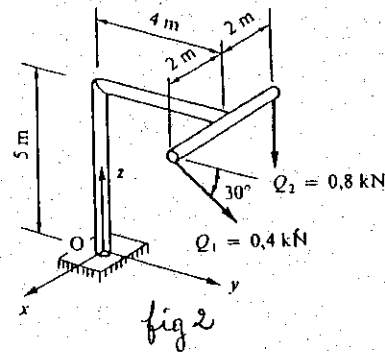
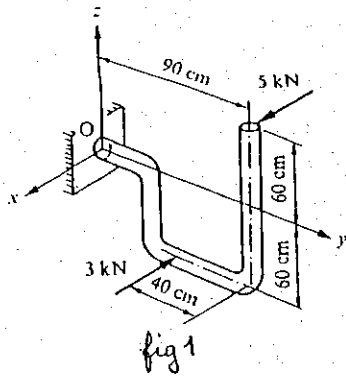
Equilibre statique global

On utilise souvent le poids propre des constructions pour assurer leur stabilité globale sur leurs appuis; cela permet fréquemment de simplifier, voire d'éviter, des appareils d'appui toujours coûteux. En fait, si l'appui est, dans sa réalisation, unilatéral, le rôle du poids propre est de le rendre bilatéral; s'il n'y a pas de blocage, le poids propre doit le créer.

Considérons le cas d'un mur de briques posé sur un sol en béton (fig. a). Ce mur n'est appuyé que dans le sens vertical descendant; aucun appui contre la translation horizontale, la translation verticale ascendante ou la rotation n'est prévu, parce que le poids propre inévitable du mur devrait garantir que ces déplacements rigides ne se produiraient pas. Il est donc essentiel de vérifier l'équilibre limite pour s'assurer qu'il en est bien ainsi.

Si la sécurité de l'équilibre limite est garantie, on dit, en termes d'ingénieur, que l'équilibre statique global est assuré.

Examinons le cas de charge du vent. Les déplacements possibles sont une translation horizontale et une rotation globale (fig. b,c). Pour une tranche de mur de 1 m, on calcule aisément le poids du mur, $G = 19,2 \text{ kN}$, et la poussée du vent, $H = 2,4 \text{ kN}$.



Equilibre statique global: (a) données; (b) glissement; (c) renversement; (d) schéma statique du mur si l'équilibre limite est satisfait.

Le mur peut glisser horizontalement; les seules forces qui interviennent pour cette vérification (fig. b) sont $F_{détab} = H = 2,4 \text{ kN}$ et $F_{stab} = \mu P = 9,6 \text{ kN}$ (avec, ici, $P = G$, où P est la réaction du sol); on en tire $\gamma_{trans} = 9,6/2,4 = 4$ et il n'y a donc aucun risque de glissement.

Le mur peut se renverser en tournant autour de l'arête A; on doit donc prendre les moments par rapport au point A et les seules forces H et G qui entrent en jeu (fig. c) permettent de calculer $M_{détab} = Hh = 3,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$ et $M_{stab} = Gt/2 = 3,84 \text{ kN} \cdot \text{m}$; d'où $\gamma_{rot} = 3,84/3,6 = 1,07$ et la sécurité à la rotation est trop faible.

Remarque

Les effets stabilisants ne se manifestent qu'au moment où la structure va se mettre en mouvement, à l'équilibre limite; ils n'interviennent donc que pour cette vérification particulière. Une fois l'équilibre statique global garanti, la structure se calcule de manière usuelle; par exemple, le mur précédent est assimilable à une poutre encastree à sa base (fig. d).

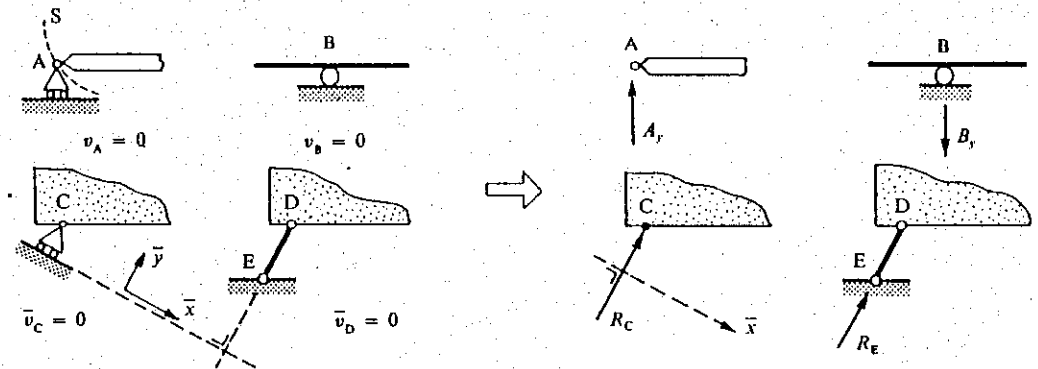
Coefficients de frottement statique.

Métal sur métal	$\mu = 0,3$	Métal sur pierre	$\mu = 0,5$
Pierre sur pierre	0,5	Métal sur bois	0,4
Bois sur bois	0,4	Pierre sur terre	0,6
Acier sur téflon	0,03		

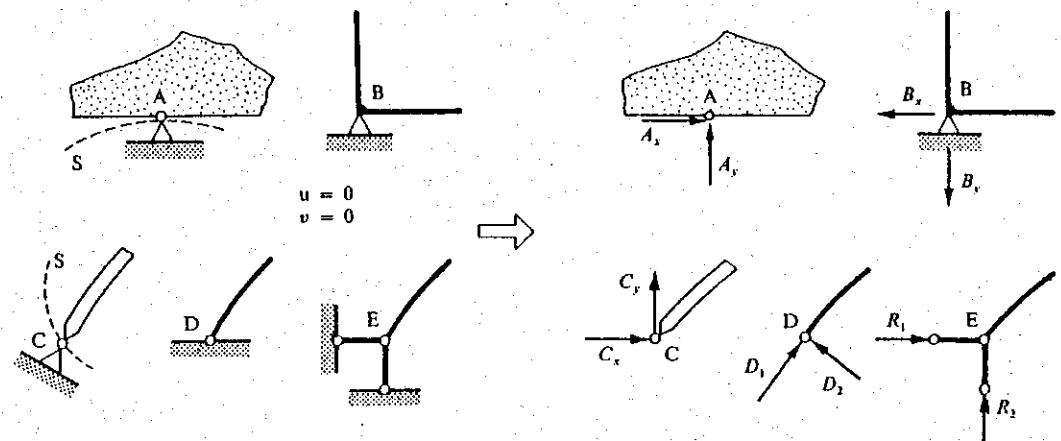
TYPES DE LIAISON (APPUIS)

Un corps en équilibre est lié au monde extérieur par des appuis

Appuis simples glissants (rouleaux)

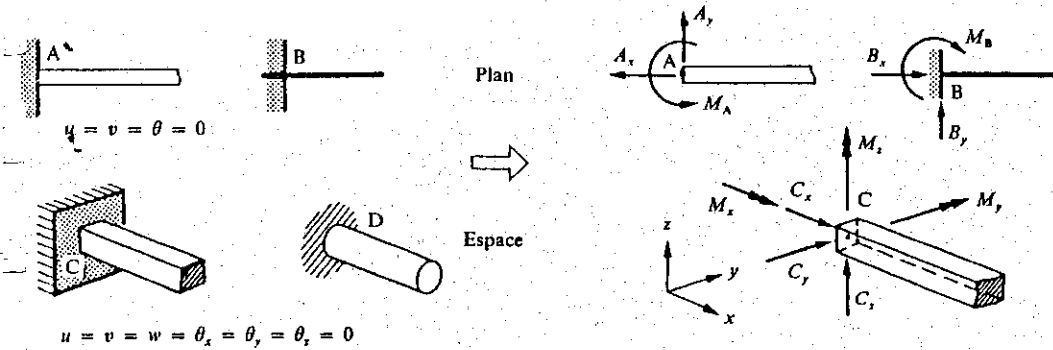


Appuis simples fixes (articulations)

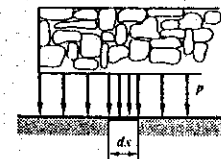


TYPES DE LIAISON (APPUIS)

Encastrements

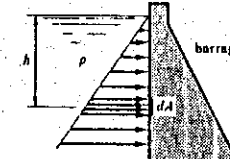


Annexe



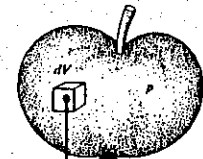
Mur

$dF = p dx$
 $p =$ poids par mètre (N/m)
 $dx =$ élément de longueur



Pression d'eau

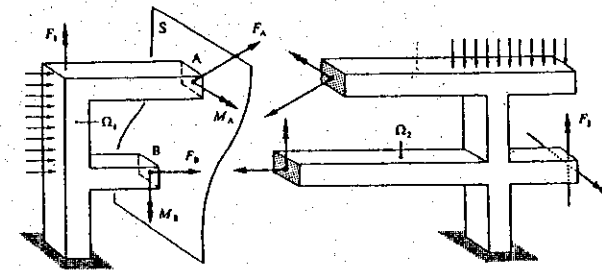
$dF = \rho g h dA$
 $\rho g h =$ pression (N/m²)
 $dA =$ élément d'aire



Matière

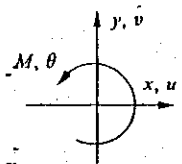
$dF = \rho g dV$
 $\rho g =$ poids volumique (N/m³)
 $dV =$ élément de volume

Forces réparties ($dF =$ force élémentaire; $\rho =$ masse volumique; $g =$ accélération de la pesanteur).

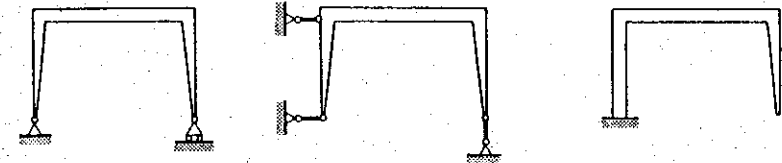


La surface S coupe deux fois la matière.

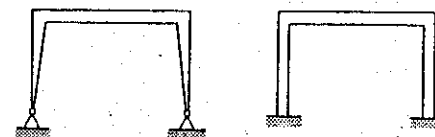
RECAPITULATIF



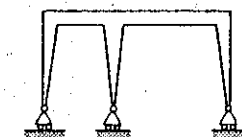
	Rouleur			Articulation			Encastrement		
Grandeur cinématique	$u \neq 0$	$v = 0$	$\theta \neq 0$	$u = 0$	$v = 0$	$\theta \neq 0$	$u = 0$	$v = 0$	$\theta = 0$
Grandeur statique	$A_x = 0$	$A_y \neq 0$	$M = 0$	$A_x \neq 0$	$A_y \neq 0$	$M = 0$	$A_x \neq 0$	$A_y \neq 0$	$M \neq 0$



Conditions d'appui isostatiques (cas plan).



Conditions d'appui hyperstatiques (cas plan).



Mécanisme plan hyperstatique dans ses appuis.

PRINCIPES FONDAMENTAUX

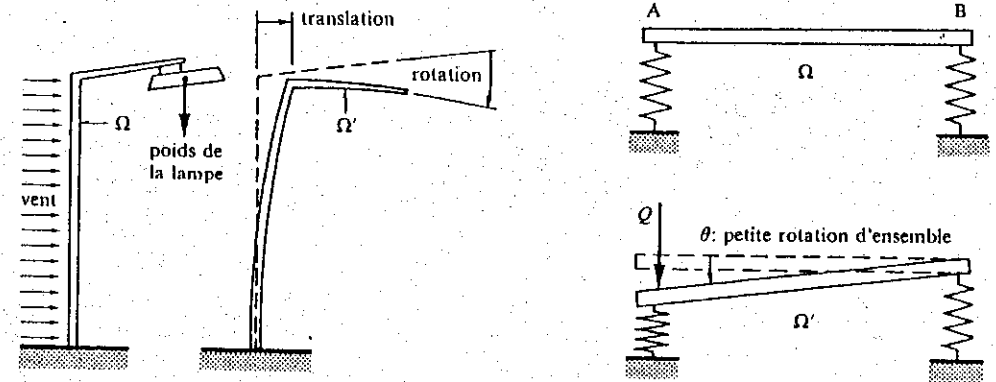
1/ PRINCIPE DES DIMENSIONS INITIALES:

Détermination des efforts \rightarrow Caractéristiques géométriques à l'état final

\Rightarrow SIMPLIFICATION: les ϵ étant faibles on les néglige

\Rightarrow on admet la conservation des dimensions initiales \odot

Exemples:

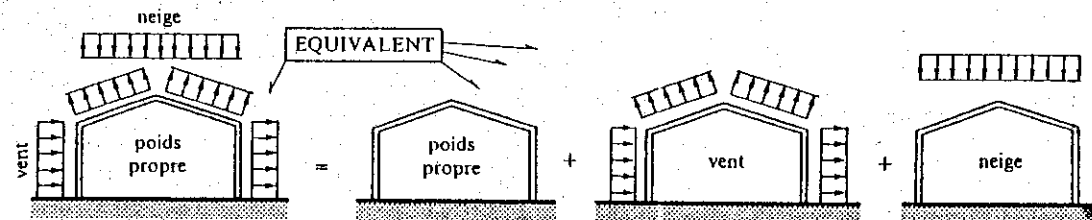


2/ PRINCIPE DE SUPERPOSITION:

L'effet produit par plusieurs forces agissant simultanément

= Σ effets produits par chacune des forces supposée agir seule

Exemples:

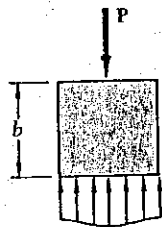
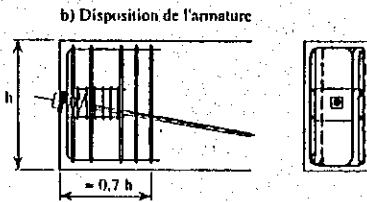
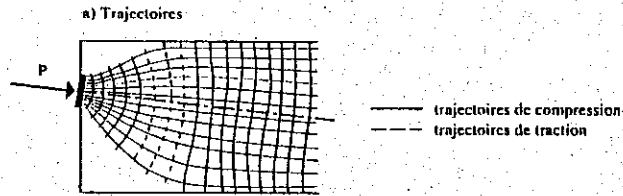
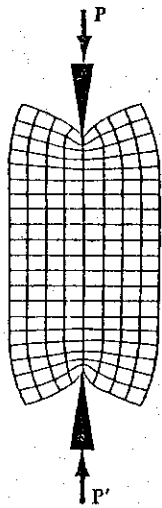


PRINCIPES FONDAMENTAUX

3/ PRINCIPE DE SAINT-VENANT:

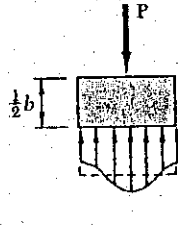
A condition de se placer suffisamment loin de la zone d'application des forces extérieures, les effets (ϵ , σ , F_i , M_i , u_i, \dots) ne sont pas modifiés quand le système est remplacé par un autre qui lui est équivalent.

Exemples:



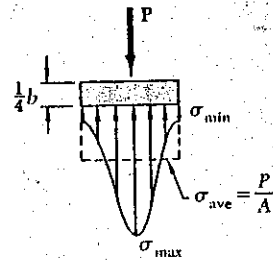
$$\sigma_{\min} = 0.973\sigma_{\text{ave}}$$

$$\sigma_{\max} = 1.027\sigma_{\text{ave}}$$



$$\sigma_{\min} = 0.668\sigma_{\text{ave}}$$

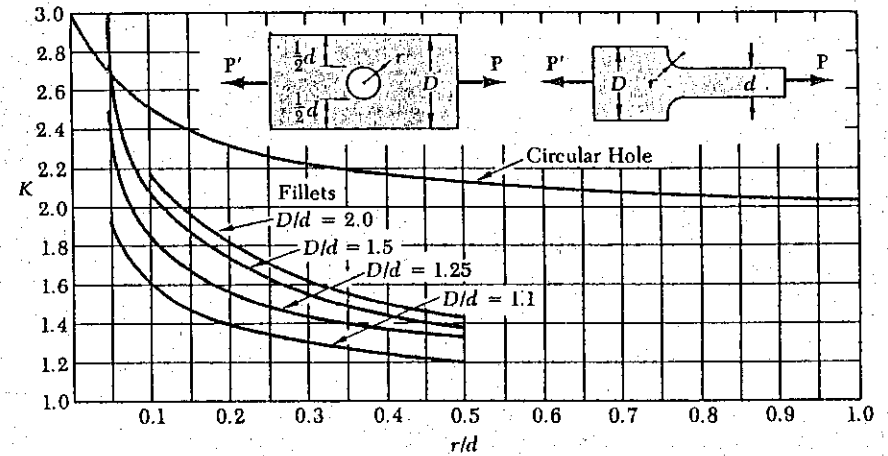
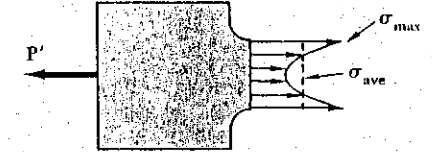
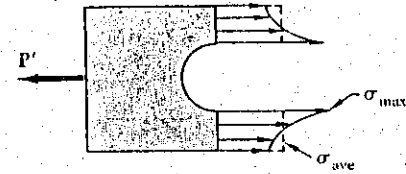
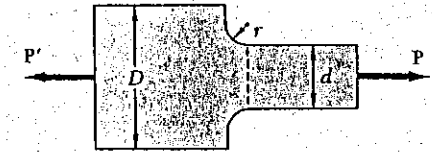
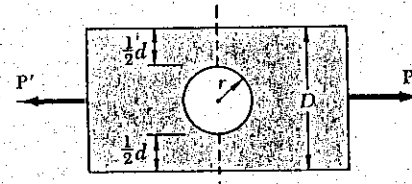
$$\sigma_{\max} = 1.387\sigma_{\text{ave}}$$



$$\sigma_{\min} = 0.198\sigma_{\text{ave}}$$

$$\sigma_{\max} = 2.575\sigma_{\text{ave}}$$

CONCENTRATION DE CONTRAINTES



Examinons le cas d'une plaque mince infiniment grande comportant un petit trou circulaire. La plaque est sollicitée par une tension uniaxiale T dans son plan. Déterminer l'état de contrainte au voisinage du trou. Négliger les forces à distance.

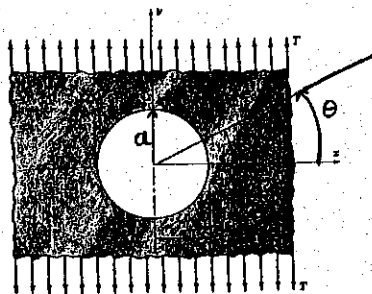


Fig. 19-11

La Fig. 19-11 représente la plaque dans le système de coordonnées polaires dont l'origine est au centre du petit trou de rayon a . Essayons une fonction de contrainte d'Airy de la forme :

$$\phi = \frac{T}{4} \left[r^4 - 2a^2 \ln r - \frac{(r^2 - a^2)^2}{r^2} \cos 2\theta \right] \quad (1)$$

On vérifie facilement que cette fonction satisfait réellement l'équation (4) du Problème 19.10. Elle peut donc servir comme fonction de contrainte d'Airy à condition de satisfaire les conditions aux limites du problème. Il faut se souvenir que les conditions d'équilibre sont automatiquement satisfaites par les contraintes impliquées par l'équation (1), puisque l'équation bi-harmonique est satisfaite par ϕ .

Dans le Problème 19.11, on a trouvé :

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{T}{2} \left[1 - \frac{a^2}{r^2} - \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \quad (2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{T}{2} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} + \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \quad (3)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = \frac{T}{2} \left(+1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \quad (4)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, nous devons évaluer les contraintes à la fois en bordure du trou et en un emplacement éloigné du trou. Au trou ($r = a$), les équations (1) et (4) montrent que σ_r ainsi que $\tau_{r\theta}$ disparaissent comme il se doit, puisque la frontière du trou ne supporte aucune charge en surface. En un point éloigné du trou, c'est-à-dire pour $r \rightarrow \infty$, les équations ci-dessus donnent l'état de contrainte suivant :


$$\sigma_r = \frac{T}{2} (1 - \cos 2\theta) \quad (5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{T}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad (6)$$

$$\tau_{r\theta} = + \frac{T}{2} \sin 2\theta \quad (7)$$

En comparant avec les résultats du Problème 17.1, on voit que les équations (5), (6) et (7) correspondent au cas de tension uniaxiale. Il est clair que ceci devrait être le cas en tout point situé à une grande distance du petit trou. Les conditions aux limites sont donc satisfaites par la fonction de contrainte.

La caractéristique la plus intéressante de ce problème réside dans l'évaluation de la contrainte tangentielle pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, pour $r = a$, à savoir pour un élément du bord du trou. La contrainte tangentielle sur un tel élément est naturellement en direction de la charge de tension appliquée. D'après l'équation (3), cette contrainte est :

$$[\sigma_\theta]_{r=a, \theta=0, \pi} = \frac{T}{2} [1 + 1 + (1 + 3)(1)] = 3T \quad (8)$$


Un petit trou dans une plaque en tension uniaxiale donne donc naissance à une contrainte normale maximale triple de celle qui existerait en absence de trou. C'est là un bon exemple de concentration

NOTIONS DE SÉCURITÉ

Autrefois on fabriquait de façon empirique pour fabriquer une pièce on se referait à la conception des pièces qui ont fait leurs preuves

et pour les pièces originales ?

⇓
critères scientifiques!

On écrit que les contraintes maximales (élastiques) développées en un point quelconque de la pièce sous la sollicitation la plus défavorable doivent rester inférieures à une contrainte admissible $\bar{\sigma}$.

$\bar{\sigma}$ étant une fraction de la limite élastique (ou la contrainte à la rupture)

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_e}{K} \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_r}{K}$$

$K > 1$ est le coef. de sécurité (facteur d'ignorance)

K permet de parer aux incertitudes inhérentes à :

- la détermination des propriétés des matériaux
- aux méthodes de calcul
- aux erreurs humaines
- aux chargements imprévus que pourrait subir la pièce ultérieurement

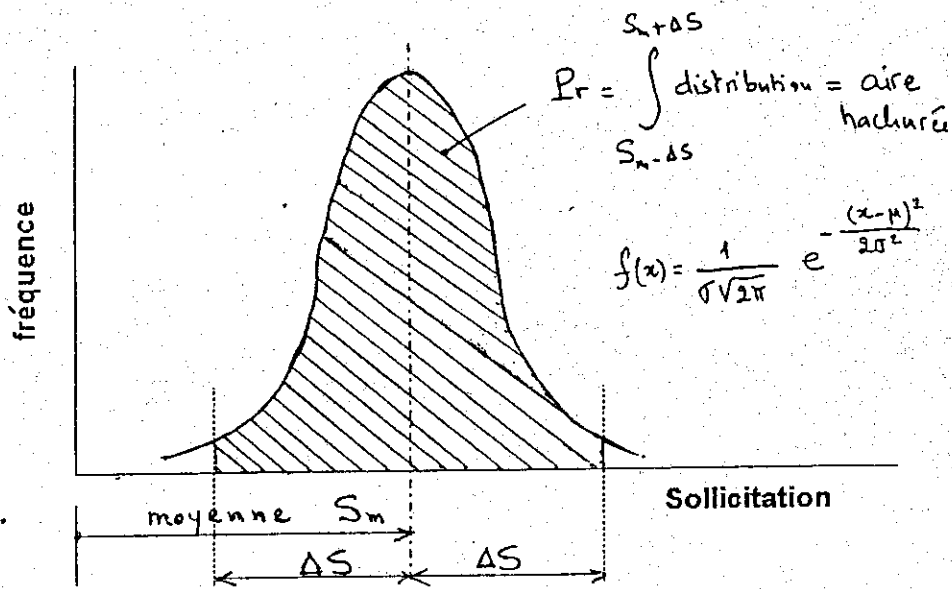
INCONVENIENTS:

← METHODE DÉTERMINISTE ET ARBITRAIRE! →

APPROCHE PROBABILISTE

La notion de facteur de sécurité se prête bien à la formulation statistique et s'apparente à la notion de

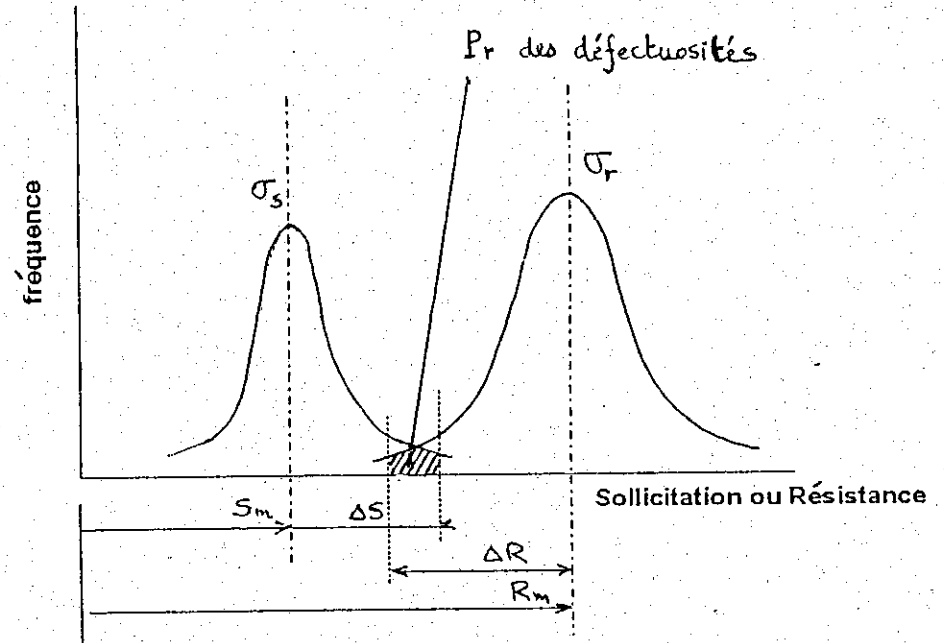
PROBABILITE DE DEFAILLANCE



lorsque $\Delta S = 3$ fois écart type, la probabilité que la valeur de la sollicitation se situe à l'intérieur des ces limites est de 99,73%

$$\Delta S = 1\sigma \rightarrow P_r = 68,2\%$$

$$\Delta S = 2\sigma \rightarrow P_r = 95,4\%$$



$$K = \frac{\sigma_r}{\sigma_s}$$

le fait que le facteur de sécurité K est > 1 ne garantit pas l'absence de défaillance

pour un facteur de sécurité donné, la probabilité de défaillance diminue lorsqu'on resserre les limites ΔS et ΔR

\Rightarrow lorsqu'on diminue ΔS et ΔR on peut réduire K pour la même probabilité de défaillance

\Rightarrow ECONOMIE

POUR RÉDUIRE ΔS:

- Calculs plus raffinés ou méthodes simplifiées éprouvées
- Essais sur prototypes
- Contrôle des charges effectives

POUR RÉDUIRE ΔR:

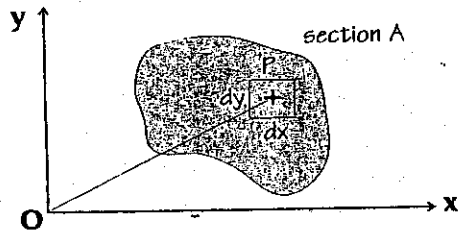
- Contrôle des matériaux
- Contrôle de la qualité de la fabrication
- Inspection après mise en service et entretien

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS

Les caractéristiques géométriques sont d'une grande utilité en RDM pour l'étude détaillée des différentes sollicitations:

- indiquent comment une section est répartie autour d'un point ou un axe
- déterminer la distribution des forces internes à l'intérieur d'une section

1) Moments statiques: (moment du 1^{er} ordre)



Par définition, le moment statique de la section A par rapport aux axes x et y est donnée par:

* par rapport à l'axe ox:

$$S_x = \iint_A y \, dx \, dy$$

En coordonnées polaires:

$$S_x = \iint_A r \sin \theta \, r \, dr \, d\theta$$

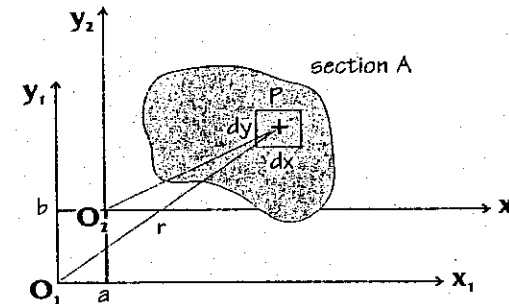
* par rapport à l'axe oy:

$$S_y = \iint_A x \, dx \, dy$$

En coordonnées polaires

$$S_y = \iint_A r \cos \theta \, r \, dr \, d\theta$$

1.1) Effet d'une translation d'axes



On suppose que S_{x1} et S_{y1} sont connues et que $O_2(a, b) / O_1 x_1 y_1$
Donc:

$$S_{x2} = \iint_A (y_1 - b) \, dA = S_{y1} - bA \quad : \quad y_2 = y_1 - b$$

$$S_{y2} = \iint_A (x_1 - a) \, dA = S_{x1} - aA \quad : \quad x_2 = x_1 - a$$

Il est possible de choisir a et b tel que S_{x2} et S_{y2} soient nuls, a et b sont alors les coordonnées du centre de gravité de la section A et sont données par:

$$a = \frac{S_{y1}}{A}$$

$$b = \frac{S_{x1}}{A}$$

De façon générale les coordonnées du centre de gravité d'une section quelconque sont données par:

$$X_G = \frac{S_Y}{A} = \frac{\iint_A x \, dx \, dy}{\iint_A dx \, dy}$$

$$Y_G = \frac{S_X}{A} = \frac{\iint_A y \, dx \, dy}{\iint_A dx \, dy}$$

Remarques:

- Si un corps a un axe de symétrie, le centre de gravité est sur cet axe;
- Si un corps a deux axes de symétrie, le centre de gravité est à l'intersection des axes;
- Si un corps a un centre de symétrie, le centre de gravité est le centre de symétrie.

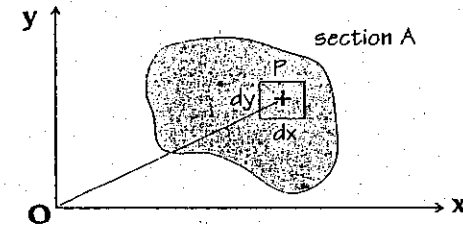
1.2) Sections composées:

Soit un corps composé de plusieurs sections A_i de centre de gravité connu G_i , les coordonnées du centre de gravité global sont déterminées par:

$$X_G = \frac{S_Y}{A} = \frac{\sum x_{G_i} A_i}{\sum A_i}$$

$$Y_G = \frac{S_X}{A} = \frac{\sum y_{G_i} A_i}{\sum A_i}$$

2) Moments d'inertie (moments quadratiques):



Par définition le moment d'inertie de la section A est donné par:

* Par rapport à l'axe ox:

$$I_x = \iint_A y^2 dx dy$$

En coordonnées polaires:

$$I_x = \iint_A (r \sin \theta)^2 r dr d\theta$$

* Par rapport à l'axe oy:

$$I_y = \iint_A x^2 dx dy$$

En coordonnées polaires:

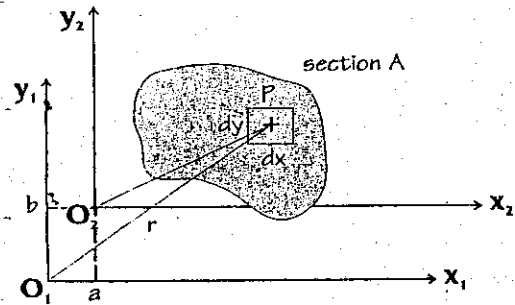
$$I_y = \iint_A (r \cos \theta)^2 r dr d\theta$$

On définit également le produit d'inertie par rapport au système d'axes Oxy par:

$$I_{xy} = \iint_A xy dx dy = \iint_A r^2 \cos \theta \sin \theta r dr d\theta$$

Remarque: I_x et I_y sont toujours positifs alors que I_{xy} peut être négatif suivant la position de A par rapport à Oxy.

2.2) Effet d'une translation d'axes:



$$I_{x_2} = \iint_A y_2^2 dA = \iint_A (y_1 - b)^2 dA$$

$$= \iint_A y_1^2 dA - \iint_A 2by_1 dA + \iint_A b^2 dA$$

$$= I_{x_1} - 2bS_{x_1} + b^2A$$

De même:

$$I_{y_2} = I_{y_1} - 2aS_{y_1} + a^2A$$

pour le produit d'inertie

$$I_{x_2y_2} = \iint_A x_2y_2 dA = \iint_A (x_1 - a)(y_1 - b) dA$$

$$= I_{x_1y_1} - aS_{x_1} - bS_{y_1} + abA$$

Cas particuliers: Lorsque O_1x_1, O_1y_1 sont des axes centraux (c.a.d. passent par le centre de gravité):

$S_{x_1} = S_{y_1} = 0$ et $a = X_G$ et $b = Y_G$ on aboutit aux formules de STEINER:

$$I_{x_2} = I_{Gx} + Y_G^2 A$$

$$I_{y_2} = I_{Gy} + X_G^2 A$$

$$I_{x_2y_2} = I_{Gxy} + X_G Y_G A$$

Remarque: Les deux premières formules montrent que:

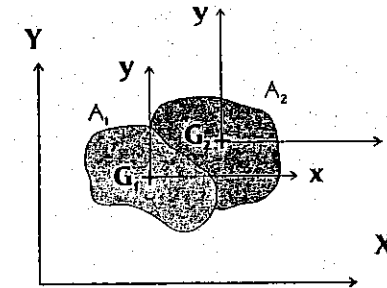
$$I_{x_2} \geq I_{Gx}$$

$$I_{y_2} \geq I_{Gy}$$

2.3) Sections composées:

$$I_X = \sum I_{X_i} = \sum (I_{xG_i} + Y_{G_i}^2 A_i)$$

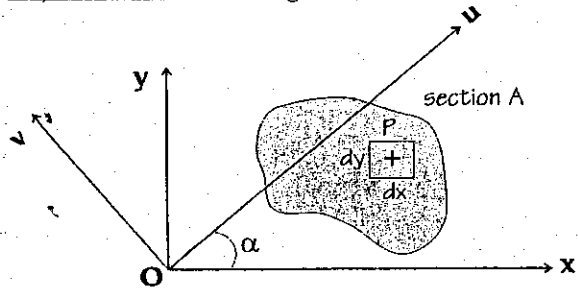
$$I_Y = \sum I_{Y_i} = \sum (I_{yG_i} + X_{G_i}^2 A_i)$$



Disposition pratique des calculs: exemple pour un seul axe

N°	Section	A_i	Y_{G_i}	S_{x_i}	$d_i = Y_{G_i} - Y_G$	$A_i d_i^2$	I_{x_i}
①							
②							
③							
④							
⑤							
	$Y_G = \frac{S_x}{A}$	A		S_x		$\sum A_i d_i^2$	$\sum I_{x_i}$

2.4) Transformations angulaires:



Soit P de coordonnées (u,v) telles que:

$$P \begin{cases} u = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ v = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

On suppose connues I_x, I_y, I_{xy}
Il s'agit de déterminer I_u, I_v, I_{uv}

$$I_u = \iint_A v^2 dA = \iint_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA$$

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha + I_y \sin^2 \alpha$$

De même on trouve

$$I_v = I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha + I_x \sin^2 \alpha$$

$$I_{uv} = I_{xy} \cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha$$

Remarque:

$$I_u + I_v = I_x + I_y = I_{p/O}$$

$$I_{p/O} = \iint_A r^2 dA = \text{moment d'inertie polaire / O}$$

2.4) Axes principaux d'inertie:

On cherche pour quelle valeur de α , I_u et I_v sont optimales. Il suffit d'écrire que:

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_p = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

$$\Rightarrow I_{uv} = 0$$

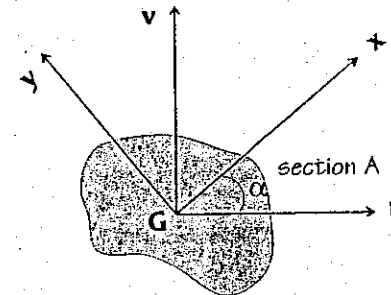
Les valeurs de α ainsi déterminées définissent deux axes principaux d'inertie de la section (axes orthogonaux). Les valeurs des moments d'inertie optimaux dits principaux, par rapport à ces deux axes sont obtenues en remplaçant α par α_p dans les expressions de I_u et de I_v :

$$I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Remarque: Un axe de symétrie est toujours un axe central et principal d'inertie

Problème: Par rapport à quel axe, I est maximal ou minimal?

Soit la section (A) rapportée à ses axes centraux principaux (u,v)
et soit $0 < \alpha < \pi/2 \Rightarrow \sin 2\alpha > 0$



D'après les formules de transformation:

$$I_{xy} = I_{uv} \cos 2\alpha - \frac{I_v - I_u}{2} \sin 2\alpha$$

$$I_{xy} = \frac{I_u - I_v}{2} \sin 2\alpha$$

donc si $I_{xy} > 0 \Rightarrow I_u > I_v$

I est maximal par rapport à l'axe appartenant aux cadrans II et IV

et si $I_{xy} < 0 \Rightarrow I_u < I_v$

I est maximal par à l'axe appartenant aux cadrans I et III

2.5) Rayon de giration:

Par définition:

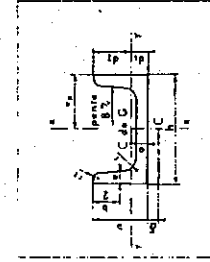
$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$r_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}}$$

et on démontre que:

$$r_o^2 = r_x^2 + r_y^2$$

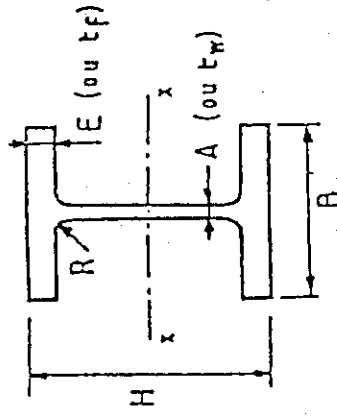


La liste dimensionnelle ci-après comporte les profils rationalisés retenus par le sélecteur français.
La signification des nombres de séries 1 et 2 est indiquée page 51.

Norme de référence : NF A 45-007 (mars 1966)

Série	Dimensions							Masse par mètre p	Section A	Surface de peinture	
	h	b	a	e	r	r1	mm ² /m			m ² /l	
2	30	15	4	4,5	4,5	2	1,74	2,21	0,103	59,3	
2	35	17,5	4	6	5	2,5	2,15	2,75	0,120	58,5	
1	40	20	5	5,5	5	2,5	2,87	3,66	0,142	49,5	
1	50	25	6	6	6	3	3,86	4,92	0,181	46,9	
2	50	30	5	7	7	3,5	5,59	7,12	0,232	41,6	
1	60	30	6	6	6	3	6,07	6,46	0,215	42,5	
2	65	42	5,5	7,5	7,5	4	7,09	9,03	0,273	38,5	
1	70	40	6	6,5	6,5	3,25	6,77	8,62	0,280	41,4	

Dimensions	Position du centre de gravité		Caractéristiques rapportées à l'axe neutre				Distance du centre de flexion pure à la face externe de l'âme δ
	h	b	ix	iy	ix	iy	
mm	mm	mm	cm	cm	cm ⁴	cm ⁴	cm
30	15	4	0,52	0,98	2,53	1,69	0,42
35	17,5	4	0,62	1,13	4,49	2,57	0,36
40	20	5	0,67	1,33	7,58	3,79	0,35
50	25	5	0,81	1,69	16,8	6,73	0,54
50	30	5	1,37	2,43	28,4	10,6	1,13
60	30	6	0,91	2,09	31,6	10,5	0,60
65	42	5,5	1,42	2,78	57,6	17,7	1,21
70	40	6	1,32	2,68	61,8	17,6	1,22



IPE xx

PROFILS	SECTION CHZ	H MM	B MM	A MM	E MM	R MM	IX CH4	IX/VX CH3	I-X CH	J CH4
IPE 80	7.64	80.	46.	3.8	5.2	5.	00.1	20.0	3.24	0.70
IPE 100	10.30	100.	55.	4.1	5.7	7.	171.	34.2	4.07	1.10
IPE 120	13.2	120.	64.	4.4	6.3	7.	318.	53.0	4.90	1.71
IPE 140	16.4	140.	73.	4.7	6.9	7.	541.	77.3	5.74	2.54
IPE 160	20.1	160.	82.	5.0	7.4	9.	869.	109.	6.58	3.53
IPE 180	23.9	180.	91.	5.3	8.0	9.	1317.	146.	7.42	4.90
IPE 200	28.5	200.	100.	5.6	8.5	12.	1943.	194.	8.26	6.46
IPE 220	33.4	220.	110.	5.9	9.2	12.	2772.	252.	9.11	8.06
IPE 240	39.1	240.	120.	6.2	9.8	15.	3892.	324.	9.97	11.60
IPE 270	45.9	270.	135.	6.6	10.2	15.	5790.	429.	11.2	14.93
IPE 300	53.8	300.	150.	7.1	10.7	15.	8356.	557.	12.5	19.47
IPE 330	62.6	330.	160.	7.5	11.5	18.	11770.	713.	13.7	25.70
IPE 360	72.7	360.	170.	8.0	12.7	18.	16270.	904.	15.0	36.20
IPE 400	84.5	400.	180.	8.6	13.5	21.	23130.	1160.	16.5	46.80
IPE 450	98.8	450.	190.	9.4	14.6	21.	33740.	1500.	18.5	63.80
IPE 500	116.	500.	200.	10.2	16.0	21.	48200.	1930.	20.4	89.00
IPE 550	134.	550.	210.	11.1	17.2	24.	67120.	2440.	22.3	118.4
IPE 600	156.	600.	220.	12.0	19.0	24.	92080.	3070.	24.3	166.2

IPE yy

PROFILS	SECTION CHZ	H MM	B MM	A MM	E MM	R MM	IY CH4	IY/VY CH3	I-Y CH	J CH4
IPE 80	7.64	80.	46.	3.8	5.2	5.	8.5	3.69	1.05	0.70
IPE 100	10.3	100.	55.	4.1	5.7	7.	15.9	5.79	1.24	1.10
IPE 120	13.2	120.	64.	4.4	6.3	7.	27.7	8.65	1.45	1.71
IPE 140	16.4	140.	73.	4.7	6.9	7.	44.9	12.3	1.65	2.54
IPE 160	20.1	160.	82.	5.0	7.4	9.	68.3	16.7	1.84	3.53
IPE 180	23.9	180.	91.	5.3	8.0	9.	101.	22.2	2.05	4.90
IPE 200	28.5	200.	100.	5.6	8.5	12.	142.	28.5	2.24	6.46
IPE 220	33.4	220.	110.	5.9	9.2	12.	205.	37.3	2.48	8.06
IPE 240	39.1	240.	120.	6.2	9.8	15.	284.	47.3	2.69	11.60
IPE 270	45.9	270.	135.	6.6	10.2	15.	420.	62.2	3.02	14.93
IPE 300	53.8	300.	150.	7.1	10.7	15.	604.	80.5	3.35	19.47
IPE 330	62.6	330.	160.	7.5	11.5	18.	788.	98.5	3.55	25.70
IPE 360	72.7	360.	170.	8.0	12.7	18.	1043.	123.	3.79	36.20
IPE 400	84.5	400.	180.	8.6	13.5	21.	1318.	146.	3.95	46.80
IPE 450	98.8	450.	190.	9.4	14.6	21.	1676.	176.	4.12	63.80
IPE 500	116.	500.	200.	10.2	16.0	21.	2142.	214.	4.31	89.00
IPE 550	134.	550.	210.	11.1	17.2	24.	2660.	254.	4.45	118.4
IPE 600	156.	600.	220.	12.0	19.0	24.	3307.	308.	4.66	166.2

Tableau Propriétés de quelques surfaces

<p>RECTANGLE</p> <p> $I_z = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{bh^3}{3}$ $I_{zy} = 0$ $I_{zy} = \frac{b^2 h^2}{4}$ </p>	<p>TRIANGLE</p> <p> $I_z = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{bh^3}{12}$ </p>	<p>PARABOLE DU SECOND DEGRÉ $y = kz^2 = \frac{(h/b^2)z^2}{2}$</p> <p> $A = \frac{2bh}{3}$ $I_z = \frac{8}{175} bh^3$ $I_y = \frac{19}{480} b^2 h$ $I_{zy} = \frac{2}{7} bh^2$ $I_x = \frac{2}{15} b^2 h$ </p>
<p>CERCLE</p> <p> $I_z = \frac{\pi r^4}{4}$ $J_G = \frac{\pi r^4}{2}$ $I_y = \frac{3\pi r^4}{4}$ </p>	<p>DEMI-CERCLE</p> <p> $I_y = \frac{\pi r^4}{8}$ $I_z = 0,11r^4$ $I_x = \frac{\pi r^4}{8}$ $I_z = \pi r^4 \left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2} \right)$ </p>	<p>PARABOLE DU SECOND DEGRÉ</p> <p> $A = \frac{bh}{3}$ $I_z = \frac{37}{2100} bh^3$ $I_y = \frac{1}{80} hb^3$ $I_x = \frac{bh^3}{21}$ $I_y = \frac{b^3 h}{51}$ </p>
<p>QUART DE CERCLE</p> <p> $I_z = \pi r^4 \left(\frac{1}{16} - \frac{4}{9\pi^2} \right)$ $I_{zy} = -0,046r^4$ $I_x = \frac{\pi r^4}{16}$ $I_{zy} = 0,125r^4$ </p>	<p>ANNEAU (r = rayon moyen)</p> <p> $A = 2\pi r t$ $I_z = \pi r^3 t$ $J_G = 2\pi r^3 t$ </p>	<p>PARABOLE DU n° DEGRÉ $y = \frac{(h/b^n)z^n}{n+1}$</p> <p> $A = \frac{bh}{n+1}$ $\bar{z} = \frac{n+1}{n+2} b$ $\bar{y} = \frac{n+1}{2(2n+1)} h$ $I_z = \frac{bh^3}{3(3n+1)}$ $I_y = \frac{hb^3}{n+3}$ </p>
<p>ELLIPSE</p> <p> $A = \pi ab$ $I_z = \frac{\pi ab^3}{4}$ $I_y = \frac{\pi ba^3}{4}$ </p>	<p>QUART D'ELLIPSE</p> <p> $A = \frac{\pi ab}{4}$ $I_z = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) ab^3$ $I_y = \frac{\pi ab^3}{16}$ </p>	<p> $I_{xy} = \frac{b^2 a^2}{72}$ $I_{xy} = -\frac{b^2 a^2}{72}$ </p>

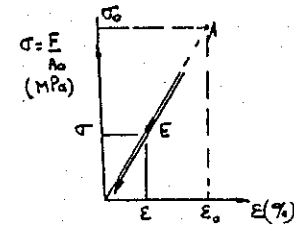
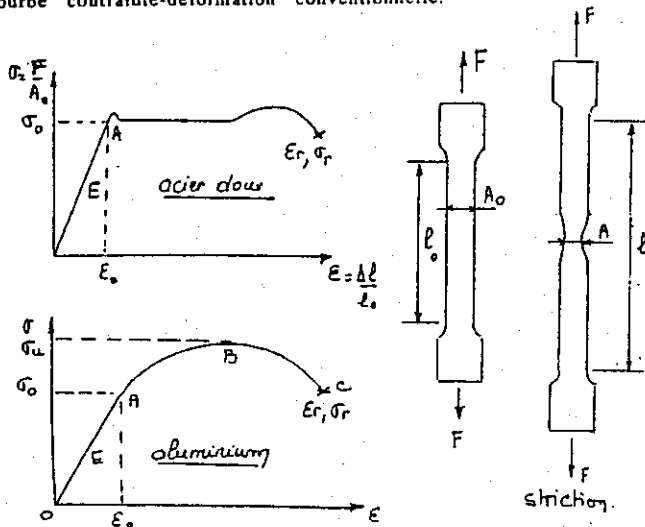
1. Loi de Hooke

Courbe contrainte-déformation

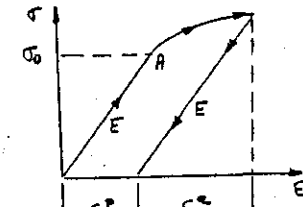
Lorsqu'on soumet une éprouvette à une force de traction progressive, l'éprouvette s'allonge, puis se rompt. Les contraintes et les déformations suivent une courbe appelée: "courbe contrainte-déformation" qui comprend:

- une partie proportionnelle OA, sur laquelle ϵ et σ suivent la relation: $\sigma = E\epsilon$
Si on relâche la force, l'éprouvette reprend sa forme initiale, c'est le comportement élastique. La contrainte σ_0 en A est appelée limite élastique ou contrainte élastique ou limite d'écoulement. E est le module d'élasticité exprimé en MPa. Conventionnellement la valeur de la limite élastique σ_0 est évaluée lorsque la déformation résiduelle après relâchement de la force est égale à 0,2%.
- une partie plastique ABC. Le point B correspond à la contrainte de tension ultime σ_u , et le point C correspond à la rupture. Si on relâche la force entre A et B, le relâchement est élastique et une déformation plastique ϵ_p reste de façon permanente. La striction se produit juste après le point B.

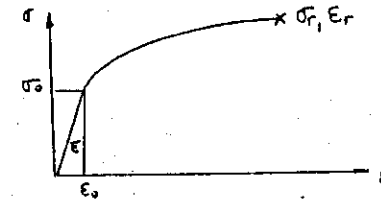
Notons que la contrainte réelle est donnée par $\sigma = F/A$, la section A est variable. Elle diminue lorsque la déformation augmente. À partir de la striction, la section diminue rapidement et la contrainte augmente continuellement. La courbe contrainte-déformation vraie est donc différente de la courbe contrainte-déformation conventionnelle.



Comportement élastique



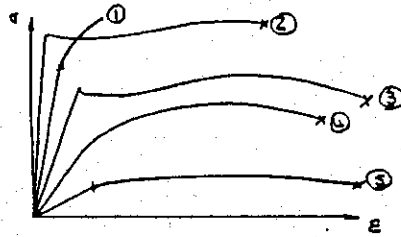
Comportement plastique



- Les principales propriétés mécaniques des matériaux sont:
- σ_0 : limite élastique à 0,2% de la déformation résiduelle (MPa)
 - ϵ_0 : déformation à la limite élastique (%)
 - E : module élastique (MPa)
 - σ_u : contrainte ultime (MPa)
 - A_0 : section initiale (mm²)
 - A_f : section finale (mm²)
 - σ_r : contrainte à la rupture (MPa)
 - ϵ_r : déformation à la rupture (%)
 - RA : $(A_0 - A_f)/A_0$: réduction de section
 - ALL : $(L_f - L_0)$: allongement à la rupture

Un matériau est:

- fragile si ϵ_r est petit
- ductile si ϵ_p est grand
- résistant si σ_0 est grand
- rigide si E est grand



Les matériaux 1, 2, 3, 4, 5 ayant les courbes σ - ϵ montrées sont tels que:

- 1- rigide, résistant, fragile
- 2- rigide, résistant, ductile
- 3- assez rigide, moyennement résistant, ductile (acier)
- 4- peu rigide, peu résistant, ductile (aluminium)
- 5- très peu rigide, très peu résistant, ductile

En résistance des matériaux classique, les matériaux sont utilisés dans le domaine élastique, donc les déformations sont petites, il n'y a pas de déformation permanente et σ et ϵ sont proportionnelles: $\sigma = E\epsilon$

Quelques valeurs caractéristiques de E et σ_0 :

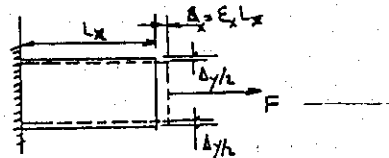
	σ_0 (MPa)	E (MPa)
acier de construction	300	200 000
acier trempé	700 à 1000	200 000
titane	500	110 000
cuiivre	55	110 000
aluminium	70	70 000
duraluminium	350	75 000
fibre de verre	1500 à 2500	75 000
fibre de carbone	2000 à 3000	180 à 250 000
béton	20 à 100 (comp.)	30 000 (environ)
bois de construction	10 à 20	10 000 (environ)

Remarque : (coefficient de Poisson)

Lorsqu'un élément s'allonge dans une direction x d'une valeur $\Delta x = \epsilon_x L_x$ sous l'effet d'une force F , il se rétrécit dans les deux autres directions avec des valeurs:

$$\Delta y = -\nu \epsilon_x L_y \text{ et } \Delta z = -\nu \epsilon_x L_z$$

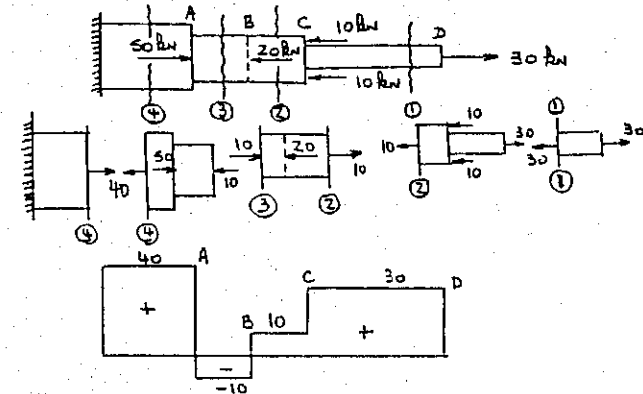
où ν est le coefficient de Poisson compris entre 0,20 et 0,40 pour la plupart des matériaux.



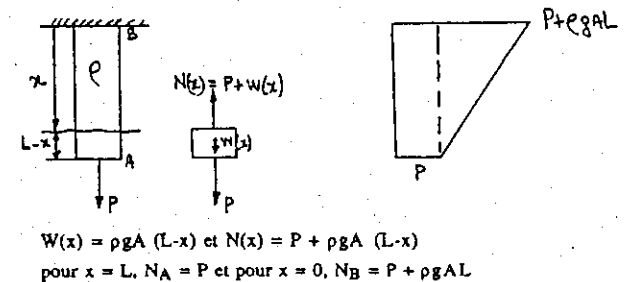
2.1. Diagramme des efforts normaux N

Le diagramme des efforts normaux est obtenu en utilisant la méthode des sections et en faisant l'équilibre de chaque élément. Il s'agit de faire une coupe entre chaque force appliquée.

Exemple I: Forces concentrées



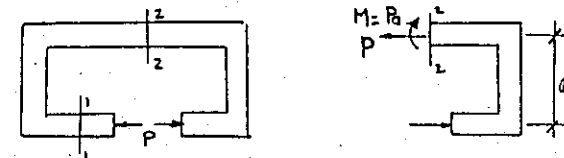
Exemple II: Forces réparties



2.2. Contraintes dues aux efforts normaux

Nature des contraintes

Un effort normal (ou axial) est un effort perpendiculaire (ou normal) à une section donnée qui passe par le centre de gravité de la section considérée. P est effort axial pour la section 1 mais non pour la section 2.



Un effort axial produit:

- des contraintes normales $\sigma = P/A$ dans les sections perpendiculaires à la force appliquée

2.3 Déformations dues aux efforts normaux

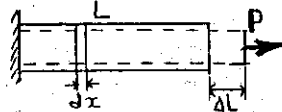
Cas où P , A et E sont constants

D'après la loi de Hooke: $\epsilon_x = \sigma_x/E$ avec $\epsilon_x = \Delta L/L$ et $\sigma_x = P/A$, il vient:

$$\Delta L = \frac{PL}{AE}$$

L'allongement d'un petit élément de longueur dx est:

$$\delta = \frac{P dx}{AE}$$



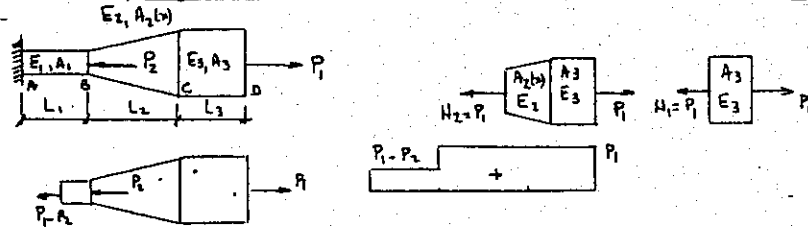
Cas où P , A et E sont variables

Pour chaque petit élément de longueur dx , on a:

$$\delta = \frac{N(x) dx}{A(x) E(x)}$$

$N(x)$ est l'effort interne variable, $A(x)$ est la section variable et $E(x)$ est le module d'élasticité variable. E peut être variable par intervalle, mais il est le plus souvent constant. Pour l'élément montré, on a les efforts normaux et des déformations suivantes:

a) Diagramme des efforts normaux



b) Allongement

Sur AB l'allongement d'un élément de longueur dx est:

$$\delta = \frac{(P_1 - P_2) dx}{A_1 E_1}$$

Le déplacement d'un point situé à une distance x du point A est:

$$\Delta L_{AB} = \int_0^x \frac{(P_1 - P_2) dx}{A_1 E_1}$$

Le déplacement du point B est:

$$\Delta L_B = \Delta L_A + \int_0^{L_1} \frac{(P_1 - P_2) dx}{A_1 E_1} = \frac{(P_1 - P_2) L_1}{A_1 E_1}$$

Sur BC le déplacement d'un point situé à une distance x du point B est

$$\Delta L_{BC} = \Delta L_B + \int_0^x \frac{P_1 dx}{A_2(x) E_2}$$

Sur CD le déplacement d'un point situé entre C et D est:

$$\Delta L_{CD} = \Delta L_C + \int_0^x \frac{P_1 dx}{A_3 E_3}$$

le déplacement du point D est:

$$\Delta L_D = \Delta L_C + \int_0^{L_3} \frac{P_1 dx}{A_3 E_3} = \Delta L_C + \frac{P_1 L_3}{A_3 E_3}$$

Donc l'allongement total de l'élément est:

$$\Delta L_D = \frac{(P_1 - P_2) L_1}{A_1 E_1} + \int_0^{L_2} \frac{P_1 dx}{A_2(x) E_2} + \frac{P_1 L_3}{A_3 E_3}$$

2.4 Déformation d'une membrure sous son propre poids

L'allongement en un point quelconque d'une membrure soumise à son poids propre est:

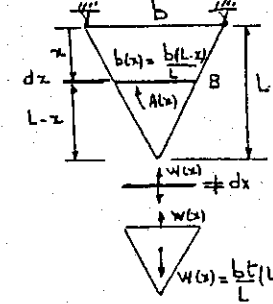
$$\Delta(x) = \int_0^x \frac{P(x) dx}{A(x) E} \text{ avec } P(x) = \rho g V(x)$$

Appliquons ceci au cas d'une plaque triangulaire. L'allongement d'un élément de plaque d'épaisseur t et de longueur dx est:

$$\delta = \epsilon_x dx = \frac{N(x) dx}{A(x) E}$$

avec $A(x) = \frac{bt}{L} (L-x)$

et $W(x) = \rho g \frac{bt}{2L} (L-x)^2$



L'allongement au point B est:

$$\Delta(x) = \int_0^x \frac{N(x) dx}{A(x) E}$$

et l'allongement total est:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(x) dx}{A(x) E} = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{\rho g b t}{2L} (L-x)^2 dx$$

soit $\Delta L = \frac{\rho g}{2E} \int_0^L (L-x) dx = \left[\frac{\rho g L x}{2E} - \frac{\rho g x^2}{2E} \right]_0^L = \frac{\rho g L^2}{4E}$

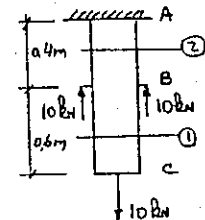
Exemple (fait en exercice)

Tracez les diagrammes de $N(x)$, $\sigma(x)$ et $\Delta(x)$ pour la tige montrée soumise à son propre poids et aux forces données, avec:

$$A = 100 \text{ mm}^2$$

$$E = 100\,000 \text{ MPa}$$

$$\rho = 2040 \text{ kg/m}^3 = 2040 \times 10^{-9} \text{ kg/mm}^3$$



(Voir solution page 7')

3. Contraintes et déformations dues à une variation de température uniforme

3.1. Déformation libre

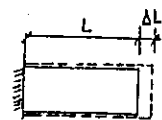
Une variation de température uniforme dans un élément produit des déformations identiques dans toutes les directions (dilatation):

$$\epsilon = \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \alpha \Delta T, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

et des contraintes nulles: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

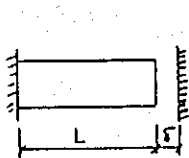
Si α est le coefficient de dilatation thermique, la variation de longueur est donc:

$$\Delta L = \epsilon_x L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$



3.2. Déformation empêchée

Examinons le problème suivant, dans lequel une barre est soumise à une augmentation de température ΔT . Jusqu'à ce que la barre touche le mur de droite, il n'y a aucun effort dans la barre. Si la température continuait à augmenter, la barre aurait tendance à s'allonger d'une longueur $\Delta L = \alpha \Delta T L$, mais le mur empêche cette déformation en créant une force de compression dans la barre.

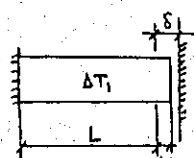


Position initiale

$$\Delta T = 0$$

$$\Delta L = 0$$

$$\sigma = 0$$

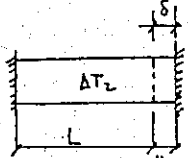


Position intermédiaire

$$\Delta T_1 > 0$$

$$\Delta L_1 = \alpha \Delta T_1 L$$

$$\sigma = 0$$



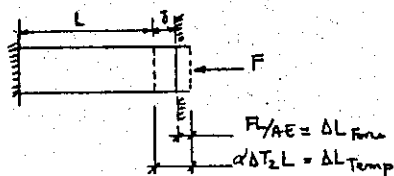
Position finale

$$\Delta T_2 > \Delta T_1$$

$$\Delta L_2 = \delta$$

$$\sigma \neq 0$$

La figure montre la décomposition de toutes les déformations:



L'égalité entre les déformations donne:

$$\delta = \Delta L_{Temp} - \Delta L_{force} = \alpha \Delta T_2 L - \frac{FL}{AE}$$

Connaissant δ et ΔT_2 , on peut calculer la force de compression F produite ainsi que la contrainte dans le matériau.

1- N, σ, Δ dus aux forces appliquées

Les contraintes sont:

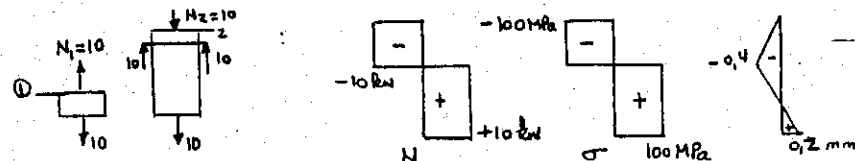
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{10000}{100} = 100 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{100000}{100} = 100 \text{ MPa}$$

Les allongements ou rétrécissements sont:

$$\Delta_{AB} = \frac{N_1 x}{AE}, \quad \Delta_B = \frac{N_1 L}{AE} = \frac{-10000 \times 400}{100 \times 10^5} = -0,4 \text{ mm (rétrécissement)}$$

$$\Delta_{BC} = \Delta_B + \frac{N_2 x}{AE} = -0,4 + \frac{10000 \cdot 10000x}{100 \times 10^5}$$

quand $x = 600 \text{ mm}$, $\Delta_c = -0,4 + 0,6 = 0,2 \text{ mm}$



2- N, σ, Δ dus au poids

Le poids de la tige est:

$$W(x) = \rho g A (L - x) = 2040 \cdot 9,81 \cdot 100 (1000 - x) \cdot 10^{-9} = 2 \times 10^{-3} (1000 - x)$$

Les contraintes sont telles que

$$N(x) = W(x) = 2 \times 10^{-3} (1000 - x), \quad \text{soit} \quad \sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = 2 \times 10^{-5} (1000 - x)$$

$$N_c = 0$$

$$\text{soit } \sigma_c = 0$$

$$N_A = 2 \text{ N}$$

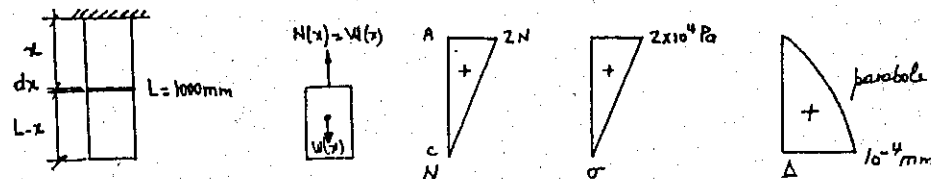
$$\text{soit } \sigma_A = 2 \times 10^{-2} \text{ MPa} = 2 \times 10^4 \text{ Pa}$$

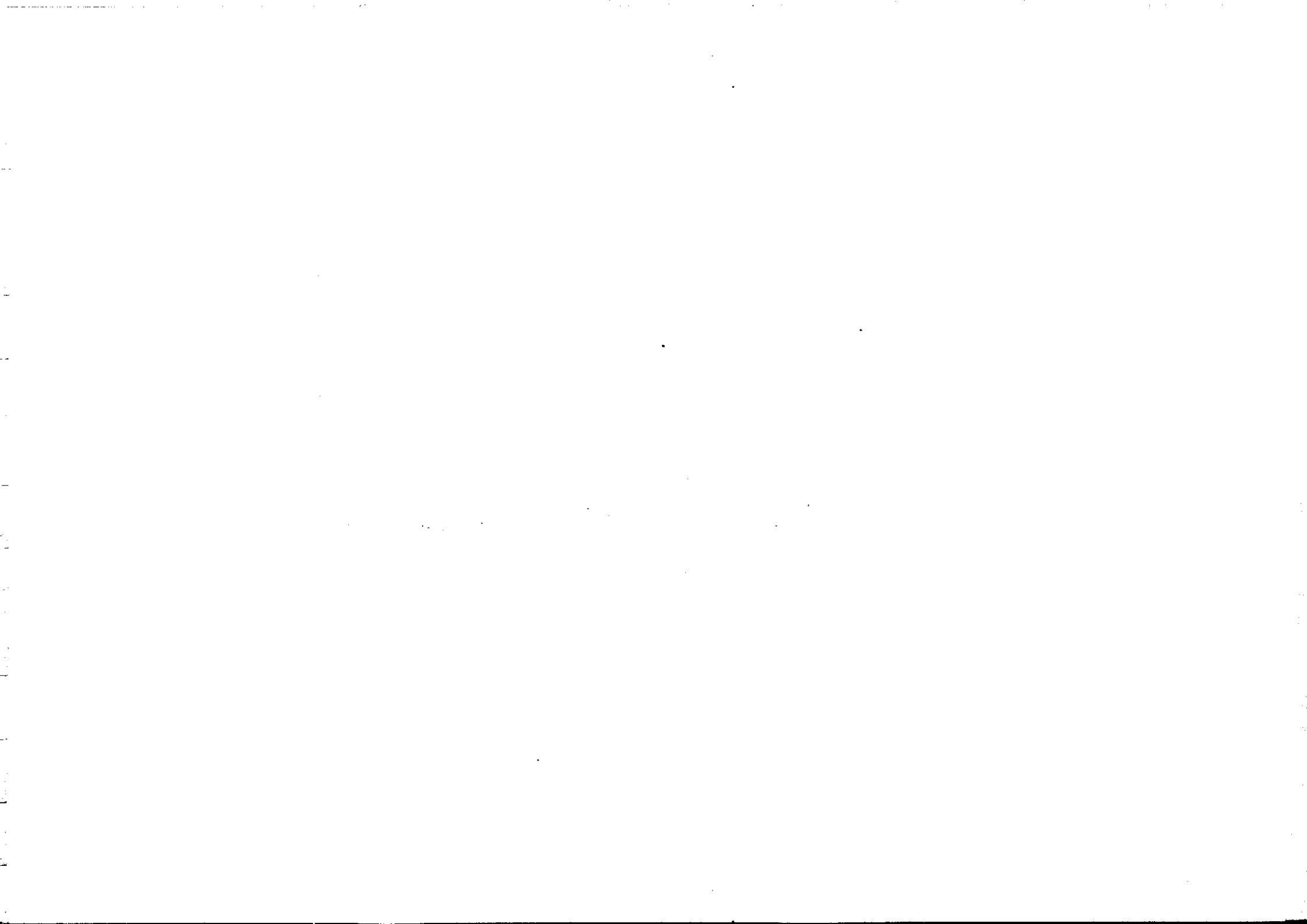
Les allongements sont tels que:

$$\Delta_{AC} = \int_0^L \frac{N(x) dx}{AE} = \int_0^L \frac{2 \times 10^{-3}}{100 \times 10^5} (1000 - x) dx = 2 \times 10^{-10} \left[1000x - \frac{x^2}{2} \right]_0^L$$

Pour $x = 0$, $\Delta_A = 0$

Pour $x = 1000 \text{ mm}$, $\Delta_C = 2 \cdot 10^{-10} \left[1000 \cdot 1000 - \frac{1000^2}{2} \right] = 10^{-10} \cdot 10^6 = 10^{-4} \text{ m}$





Cylindre ouvert à paroi mince:

On retrouve fréquemment en pratique des cylindres droits à paroi mince contenant des fluides sous pression.

Pour un cylindre ouvert infiniment long, il n'existe aucune contrainte longitudinale.

Soit une longueur b caractéristique de ce cylindre (voir figure)

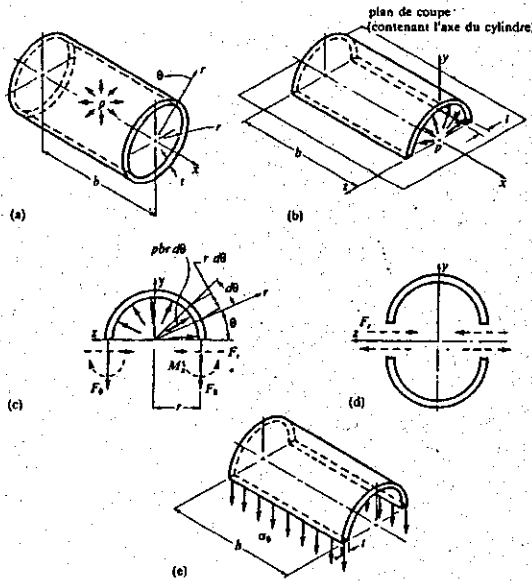


Figure 2.8 Cylindre ouvert à paroi mince sous pression. Étude de la contrainte circonférentielle.

La contrainte normale circonférentielle σ_θ est due à F_θ :

$$\sigma_\theta = \frac{F_\theta}{bt} = \frac{pbr}{bt} \quad \text{donc} \quad \boxed{\sigma_\theta = \frac{pr}{t}}$$

σ_θ est appelée aussi tension de membrane (uniforme dans toute l'épaisseur du cylindre)

Étude des allongements:

La paroi étant mince, on peut développer le cylindre et obtenir ainsi une feuille de longueur $2\bar{u}r$ et de section bt soumise à une traction uniaxiale.

L'allongement circonférentiel est:
$$\delta_\theta = \frac{\sigma_\theta(2\bar{u}r)}{E} = \boxed{\frac{2\bar{u}r^2 p}{tE}}$$

avec, en plus, une variation de température ΔT , l'allongement est:

$$\delta_\theta = \frac{2\bar{u}r^2 p}{tE} + \alpha(2\bar{u}r)\Delta T$$

$$\boxed{\delta_\theta = 2\bar{u} \left(\frac{pr^2}{tE} + \alpha r \Delta T \right)}$$

En pratique, c'est la variation du rayon δ_r qui nous intéresse:

perimètre finale = $2\bar{u}r + \delta_\theta = 2\bar{u}(r + \delta_r)$ donc

$$\delta_r = \frac{\delta_\theta}{2\bar{u}} \Rightarrow \boxed{\delta_r = \frac{pr^2}{tE} + \alpha r \Delta T}$$

Étude des contraintes:

On suppose que la contrainte est uniforme dans toute l'épaisseur de la paroi. Cette hypothèse est d'autant plus valable que le rapport $t/r \rightarrow 0$ (en pratique lorsque $t/r \leq 1/10$)

• puisque $t/r \rightarrow 0$ donc $M_x \rightarrow 0$ (la variation de σ dans l'épaisseur est négligeable)

• par symétrie selon l'axe y , il en résulte que $F_r = 0$

L'équilibre des forces verticales donne:

$$2F_\theta = \int_0^\pi pbr \sin\theta \Rightarrow \boxed{F_\theta = pbr}$$

SYSTÈMES RÉTICULÉS (S.R.)

Calcul des treillis plans

1 Définition des treillis

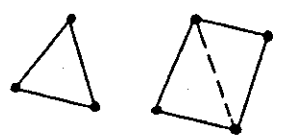
Les treillis (ou fermes) sont des structures composées de membrures droites jointes à leurs extrémités afin de former des structures rigides (ponts, grues, poutres, fermes,...).

Les joints peuvent être formés de un ou plusieurs boulons ou être soudés. Néanmoins, quelle que soit la nature du joint, il sera toujours schématisé par une rotule dans le plan (2 forces inconnues A_x et A_y).

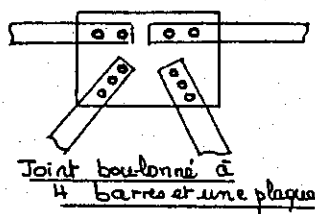
L'élément de base du treillis est le triangle, car il forme une structure stable en elle-même. Quatre barres ne forment en général pas une structure stable, il faut en ajouter une cinquième pour former deux triangles.

Les barres d'un treillis peuvent être de section ronde, carrée, rectangulaire, en I, en T, des cornières, ou des doubles cornières. Les treillis formés de cornières sont les plus courants dans les constructions.

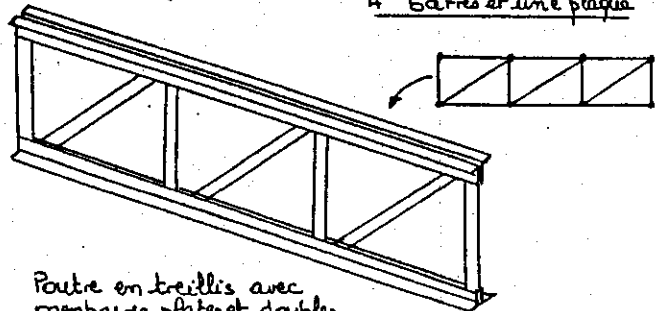
Le but du treillis est de concentrer la masse des matériaux le plus loin possible de l'axe passant par le centre de gravité de la section du treillis. L'expérience pratique montre que plus la section d'une poutre est haute, moins elle se déforme par flexion sous l'effet des charges. Le calcul optimal d'une poutre est donc d'avoir une section haute, avec des masses le plus éloignées possible du centre de gravité; ce que permet le treillis.



Élément de base (Triangle)

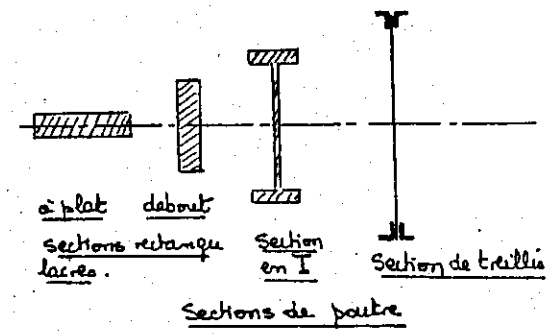


Joint boulonné à 4 barres et une plaque



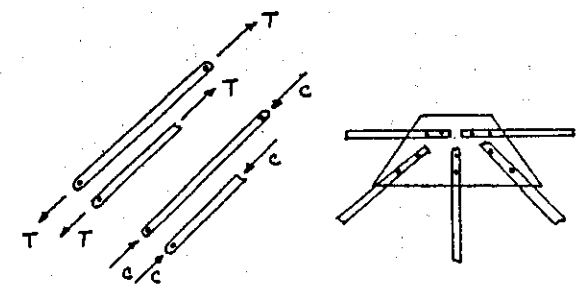
Poutre en treillis avec membrures plates et doubles cornières.

Chapitre II (S. R.)

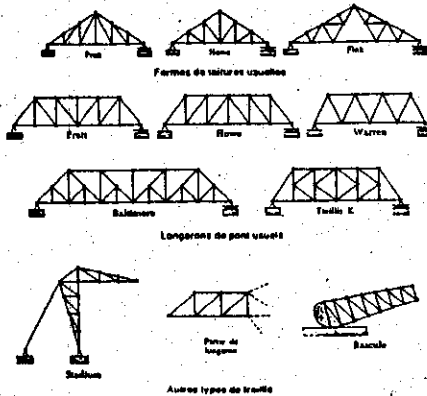
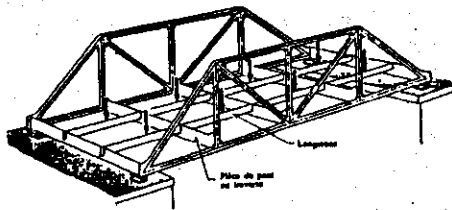


2 Conditions pour qu'une structure soit un treillis

- 1- Les éléments ne sont soumis qu'à la traction ou la compression.
- 2- Les membrures sont droites entre 2 noeuds (joints).
- 3- Les 2 forces dans une barre isolée ont la même direction que la barre et sont égales, opposées et colinéaires.
- 4- L'effort est le même en toute section d'une membrure.
- 5- Le poids des membrures est négligeable (sauf indication contraire).
- 6- Les forces extérieures n'agissent que sur les noeuds.
- 7- Les noeuds sont considérés comme étant articulés (rotule) dans tous les treillis (pas de moments internes aux noeuds).



Chapitre II (S.R.)



3 Calcul des forces dans les treillis plans

Les forces dans les barres des treillis se calculent à partir de deux méthodes :

- la méthode des noeuds (utilisée le plus souvent lorsqu'on désire obtenir les forces dans toutes barres)
- la méthode des sections (lorsqu'on désire les forces dans certaines barres seulement)

3.1- Méthode des noeuds

Il faut satisfaire aux conditions d'équilibre à chaque noeud: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, ($\Sigma M_z = 0$, implicitement car les noeuds sont considérés comme des rotules).

La procédure est la suivante:

- Faire le DCL du treillis en entier et calculer au besoin les réactions.
- Isoler un noeud où il y a seulement 2 inconnues.
- Calculer les inconnues à ce noeud.
- Isoler un autre noeud où il n'y a que deux inconnues en appliquant la règle Action = Réaction.
- Vérifier au dernier noeud l'équilibre des forces.

Les forces inconnues sont ordinairement choisies arbitrairement dans le sens positif; le sens exact étant déterminé ultérieurement lors des calculs.

Le treillis doit être isostatique, pour pouvoir le résoudre avec les

Chapitre II (S.R.)

soit

équations d'équilibre

j : le nombre de noeuds

m : le nombre de barres

r : le nombre de réactions

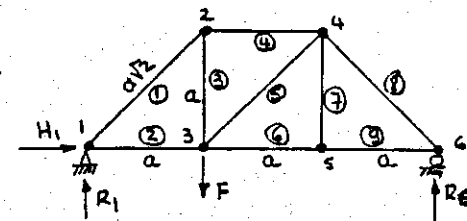
si $m + r = 2j$, le treillis est isostatique

si $m + r < 2j$, le treillis est instable

si $m + r > 2j$, le treillis est hyperstatique

Exemple 1

Calculer les forces dans toutes les barres.



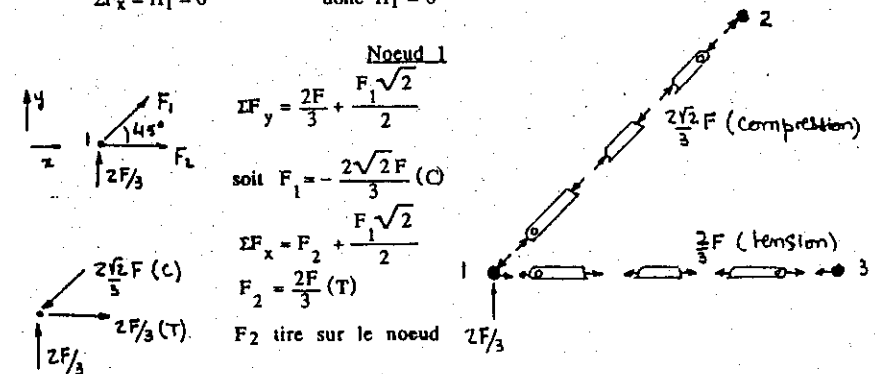
Comme $m = 9$, $j = 6$, $r = 3$, $m + r = 9 + 3 = 2(6) = 12$ donc le treillis est isostatique

Calcul des réactions

$$\Sigma M_1 = -aF + 3aR_6 = 0 \quad \text{donc } R_6 = F/3$$

$$\Sigma F_y = R_1 - F + F/3 = 0 \quad \text{donc } R_1 = 2F/3$$

$$\Sigma F_x = H_1 = 0 \quad \text{donc } H_1 = 0$$



Noeud 1

$$\Sigma F_y = \frac{2F}{3} + \frac{F_1 \sqrt{2}}{2}$$

$$\text{soit } F_1 = -\frac{2\sqrt{2}F}{3} \text{ (C)}$$

$$\Sigma F_x = F_2 + \frac{F_1 \sqrt{2}}{2}$$

$$F_2 = \frac{2F}{3} \text{ (T)}$$

F_2 tire sur le noeud $2F/3$

Chapitre II (S.R.)

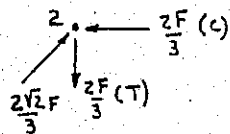
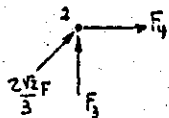
Nœud 2

$$\sum F_y = \frac{2\sqrt{2}}{3} F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + F_3 = 0$$

$$F_3 = -\frac{2F}{3} \text{ (T)}$$

$$\sum F_x = \frac{2\sqrt{2}}{3} F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + F_4 = 0$$

$$F_4 = -\frac{2F}{3} \text{ (C)}$$



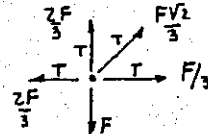
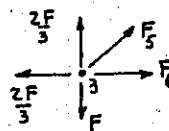
Nœud 3

$$\sum F_y = \frac{2F}{3} - F + F_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$F_5 = \frac{F\sqrt{2}}{3} \text{ (T)}$$

$$\sum F_x = -\frac{2F}{3} + F_5 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_6 = 0$$

$$F_6 = F/3 \text{ (T)}$$

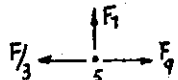


Nœud 5

$$\sum F_y = F_7 = 0$$

$$\sum F_x = -\frac{F}{3} + F_9 = 0$$

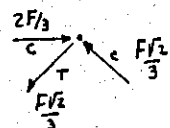
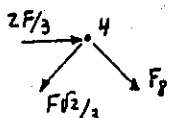
$$F_9 = F/3 \text{ (T)}$$



Nœud 4

$$\sum F_x = \frac{2F}{3} - \frac{F\sqrt{2}\sqrt{2}}{3} + F_8 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$F_8 = -\frac{F\sqrt{2}}{3} \text{ (C)}$$

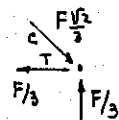
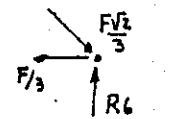


Nœud 6 (Vérification)

$$\sum F_x = -\frac{F}{3} + \frac{F\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

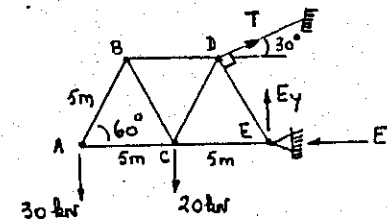
$$\sum F_y = -\frac{F\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + R_6 = 0$$

$$R_6 = F/3$$



Chapitre II (S.R.)

Exemple 2



Calcul des réactions

$$\sum M_B = +(30 \times 10) + (20 \times 5) - 5T = 0$$

$$\sum F_x = -E_x + 80 \cos 30 = 0$$

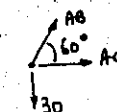
$$\sum F_y = -30 - 20 + E_y + 80 \sin 30 = 0$$

$$T = 80 \text{ kN}$$

$$E_x = 69,3 \text{ kN}$$

$$E_y = 10 \text{ kN}$$

Nœud A

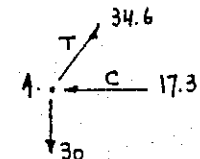


$$\sum F_y = AB \sin 60 - 30 = 0$$

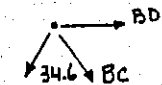
$$AB = 34,6 \text{ kN (T)}$$

$$\sum F_x = 34,6 \cos 60 + AC = 0$$

$$AC = -17,3 \text{ kN (C)}$$



Nœud B

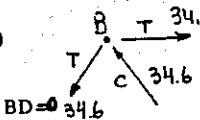


$$\sum F_y = -34,6 \cos 30 - BC \cos 30 = 0$$

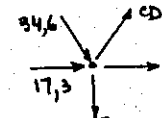
$$BC = -34,6 \text{ kN (C)}$$

$$\sum F_x = -34,6 \sin 30 - 34,6 \sin 30 + BD = 0$$

$$BD = 34,6 \text{ kN (T)}$$



Nœud C

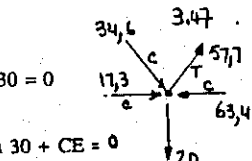


$$\sum F_y = -20 - 34,6 \cos 30 + CD \cos 30 = 0$$

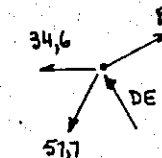
$$CD = 57,7 \text{ kN (T)}$$

$$\sum F_x = 17,3 + 34,6 \sin 30 + 57,7 \sin 30 + CE = 0$$

$$CE = -63,4 \text{ kN (C)}$$



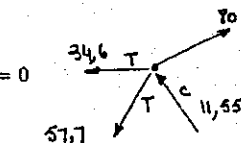
Nœud D



$$\sum F_x = -34,6 + 80 \cos 30$$

$$-57,7 \sin 30 + DE \sin 30 = 0$$

$$DE = 11,55 \text{ kN (C)}$$

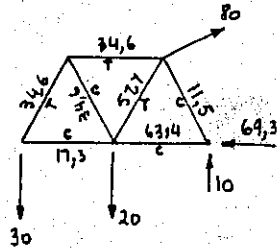
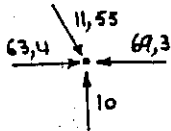


Chapitre II (S.R.)

Noeud E (Vérification)

$$\Sigma F_x = 63,4 - 69,3 + 11,55 \sin 30 = 0$$

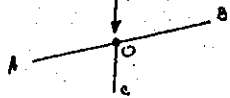
$$\Sigma F_y = 10 - 11,55 \cos 30 = 0$$



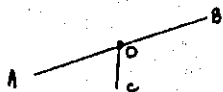
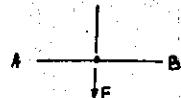
Noeuds particuliers



$$F_{OA} = F_{OB} \text{ (de sens opposé)}$$

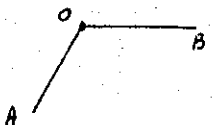


$$F_{OC} = F$$

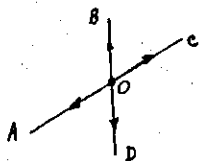


$$OC = 0$$

$$F_{AO} = F_{OB} \text{ (sens opposé)}$$



$$F_{AO} = F_{OB} = 0$$



$$F_{OA} = F_{OC} \text{ (sens opposé)}$$

$$F_{OB} = F_{OD} \text{ (sens opposé)}$$

Chapitre II (S.R.)

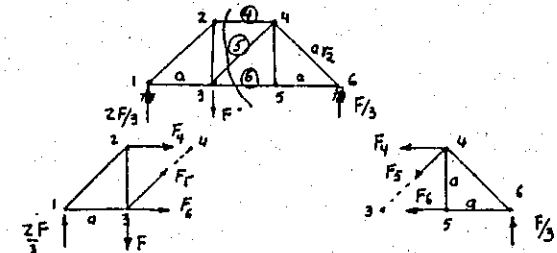
3.2- Méthode des sections

La procédure de calcul est la suivante:

- Faire le DCL du treillis entier et calculer les réactions (si nécessaire).
- Couper le treillis en 2 parties distinctes par une coupe à travers les barres dans lesquelles vous voulez calculer les efforts.
- Faire le DCL de l'une ou l'autre des parties du treillis en introduisant des efforts inconnus dans les barres coupées.
- Appliquer les équations d'équilibre ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M = 0$) et calculer les efforts.

Exemple 1

Calculer les forces dans les barres 4, 5 et 6.



En appliquant les équations d'équilibre à la partie de droite, il vient:

$$\Sigma M_4 = \frac{F}{3} a - aF_6 = 0$$

$$F_6 = F/3 \text{ (T)}$$

$$\Sigma F_y = -F_5 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{F}{3} = 0$$

$$F_5 = \frac{\sqrt{2}}{3} F \text{ (T)}$$

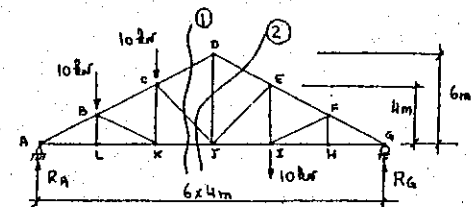
$$\Sigma M_3 = +2a \frac{F}{3} + aF_4 = 0$$

$$F_4 = -\frac{2}{3} F \text{ (C)}$$

F4: sens contraire à la figure

Exemple 2

Déterminez la force dans DJ.



Chapitre II (S-R_v)

La coupe 1 permet de calculer KJ et CJ, la coupe 2 permet de calculer DJ.

Réactions aux appuis

$$\Sigma M_G = (10 \times 20) + (10 \times 16) + (10 \times 8) - (R_A \times 24) = 0 \quad \text{donc } R_A = 18,3 \text{ kN}$$

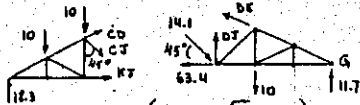
$$\Sigma F_y = 18,3 - 10 - 10 - 10 + R_G = 0 \quad \text{donc } R_G = 11,7 \text{ kN}$$

Coupe 1

$$\Sigma M_C = 4 \text{ KJ} + (4 \times 10) - (18,3 \times 8) = 0 \quad \text{donc } KJ = 63,4 \text{ kN (T)}$$

$$\Sigma M_A = -(10 \times 4) - (10 \times 8) - \left(CJ \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 \right) - \left(CJ \frac{\sqrt{2}}{2} \times 8 \right) = 0$$

donc CJ = - 14,1 kN (C)
(sens contraire)



Coupe 2

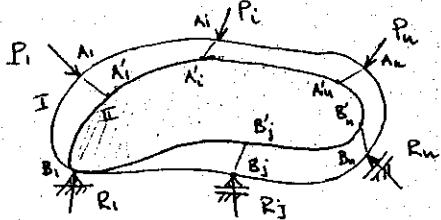
$$\Sigma M_G = (10 \times 8) - (DJ \times 12) + \left(14,1 \frac{\sqrt{2}}{2} \times 12 \right) = 0 \quad \text{donc } DJ = 16,63 \text{ kN (T)}$$

Remarquez que si la force en I est nulle, on a: FH = FI = IE = JE = 0 et on pourrait alors faire directement une seule coupe à travers CD, DJ, (JE = 0) et JI.

Energie potentielle de deformation:

Supposons un ressort de longueur l qu'on charge lentement et progressivement, (pour éviter les effets dynamiques), à P . Il accuse un raccourcissement Δl . Le travail de P est alors emmagasiné dans le ressort sous forme d'énergie potentielle de déformation. Ceci est valable dans le cas général pour n'importe quel système élastique. En dehors de toute sollicitation extérieure, l'énergie potentielle de déformation est nulle (corps non déformé).

Sous l'effet de sollicitations extérieures, un corps se déforme \Rightarrow ses différents points subissent des déplacements quelconques.



Les points d'application des forces sont les seuls qui donnent une information sur la déformation du système

Tant que le système n'est pas sollicité au delà de sa limite élastique, l'énergie potentielle de déformation peut être récupérée totalement. Dans le cas contraire, seule une fraction de l'énergie peut être récupérée, l'autre fraction sert à avoir la déformation résiduelle.

Il est facile de voir que $W(R_1, \dots, R_j, \dots, R_n) = 0$

Car on ne peut avoir qu'

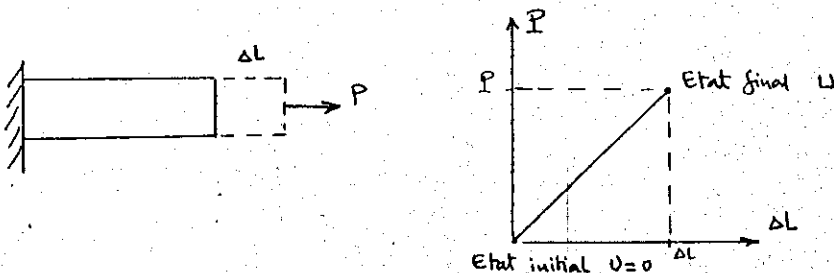
- un appui glissant : $R_j \perp \delta$
- un appui fixe : $\delta = 0$
- un encastrement : $\delta = 0, \theta = 0$

Ceci est général, non seulement pour un effort normal, mais pour toute autre sollicitation.

Evaluons l'énergie potentielle de déformation dans le cas où la sollicitation est un effort normal (T,C).

Cas où $N = cte$ le long de la barre :

Considérons une console soumise à une charge P lente et progressive.



Considérons un état intermédiaire caractérisé par αP et $\alpha \Delta l$ ($\alpha < 1$) et un état intermédiaire infiniment voisin en donnant un accroissement $d(\alpha P)$ à la charge αP . Il va en résulter un allongement supplémentaire $d(\alpha \Delta l) = \Delta l d\alpha$ qui est le déplacement du point d'application de la force αP

$$\Delta U = \alpha P \Delta l d\alpha + k' d\alpha P d\alpha \Delta l \quad (2^{ème} \text{ ordre})$$

$$\Delta U = P \Delta l \alpha d\alpha$$

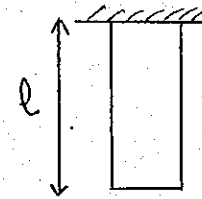
$$U = \int_0^1 P \Delta l \alpha d\alpha \Rightarrow U = \frac{P \Delta l}{2} \quad \text{or } \Delta l = \frac{P l}{EA}$$

$$\Rightarrow U = \frac{P^2 l}{2EA}$$

Cas d'un diagramme de N quelconque :

$$U = \int_0^l \frac{N^2(z) dz}{2EA(z)}$$

Ex 1 :



poutre suspendue soumise à son poids propre (γ)

$$W_{def} = \int_0^l \frac{N^2(z) dz}{2EA(z)} = \frac{1}{2EA} \int_0^l N^2(z) dz$$

$$W_{def} = \frac{1}{2EA} \int_0^l (\gamma A z)^2 dz = \frac{\gamma^2 A l^3}{6E}$$

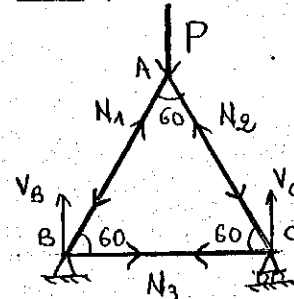
Section = $A = \text{constante}$

$$\text{On peut calculer } dW_{def} = \frac{1}{2} \gamma A dz \times w(z) = \frac{\gamma^2 A}{4E} (l^2 - z^2) dz$$

$$\Rightarrow W_{def} = \frac{\gamma^2 A l^3}{6E}$$

$$\text{avec } w(z) = \delta(z) = \frac{\gamma}{2E} (l^2 - z^2)$$

Ex 2 : Système réticulé



$$AB = BC = CA = l \quad EA = cte$$

$$V_b = V_c = P/2$$

$$\text{Noeud A : } N_1 = N_2 \Rightarrow 2N_1 \cos 30 = P \Rightarrow N_1 = N_2 = -\frac{P}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Noeud B : } N_3 = N_1 \cos 60 = \frac{P}{2\sqrt{3}}$$

$$U = 2 U_1 U_3 = 2 \left(\frac{N_1^2 l}{2EA} \right) + \frac{N_3^2 l}{2EA} = \frac{3}{8} \frac{P^2 l}{EA}$$

THEOREME DE CASTIGLIANO :

C'est un des théorèmes énergétiques les plus importants admettant divers types d'applications:

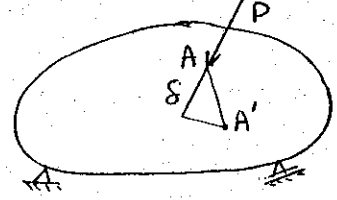
- Détermination des déplacements des différents points d'un système (flèches)
- Permet de résoudre les systèmes hyperstatiques (intérieurement et extérieurement.)

Enoncé

La dérivée partielle de l'énergie potentielle de déformation par rapport à une force (généralisée) est égale au déplacement du point d'application de la force dans la direction de celle-ci (c.à.d. la projection du déplacement total sur le support de la force considérée)

On appelle force généralisée :

- Soit une force ponctuelle (déplacement linéique δ)
- Soit un moment (rotation θ)

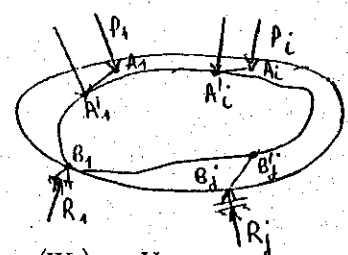


$\overline{AA'}$: déplacement total

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta$$

Démonstration :

Soit un corps élastique sollicité par un système de forces extérieures données $P_1, \dots, P_i, \dots, P_n$ travaillant dans le domaine élastique)



- $A_1 \rightarrow A_1' (\delta_1 \text{ dans le sens de } P_1)$
- $A_2 \rightarrow A_2' (\delta_2 \text{ dans le sens de } P_2)$
- $A_i \rightarrow A_i' (\delta_i \text{ dans le sens de } P_i)$
- $A_n \rightarrow A_n' (\delta_n \text{ dans le sens de } P_n)$

- $P_1 \rightarrow (W_e)_1 \rightarrow U_1$
- $P_i \rightarrow (W_e)_i \rightarrow U_i$
- $P_n \rightarrow (W_e)_n \rightarrow U_n$

Finalement $U = \sum U_i = U(P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n)$

Dans un accroissement infinitésimal dP_i à P_i . Il en résulte que

$$U \rightarrow U + dU = U + \frac{\partial U}{\partial P_i} dP_i \quad (1)$$

Inversons l'ordre d'application des efforts :

- D'abord dP_i appliquée d'une façon lente et progressive

$$(W_e)_{dP_i} = \frac{1}{2} dP_i d\delta_i$$

- Ensuite $(P_1, \dots, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n)$ de façon à retrouver le système initial :

$(W_e)_{(P_1, \dots, P_i, \dots, P_n, dP_i)} = U +$ le travail de dP_i dans le déplacement provoqué par

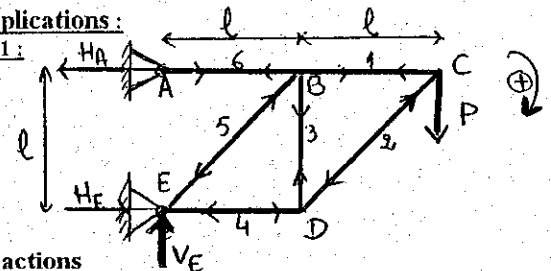
$$(P_1, \dots, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n) = U + dP_i \delta_i \quad (2) \quad (\text{car } dP_i \text{ existe déjà})$$

Egalisons les énergies potentielles de déformation (1) et (2)

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_i} dP_i = \frac{1}{2} dP_i d\delta_i + U + dP_i \delta_i \approx U + dP_i \delta_i \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i$$

Applications :

Ex 1 :



$EA = E$

Réactions

$$\sum M / E = 0 \Rightarrow P \times 2\ell = H_A \times \ell \Rightarrow H_A = 2P$$

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow H_E = 2P \quad V_E = P$$

On détermine les efforts dans les barres.

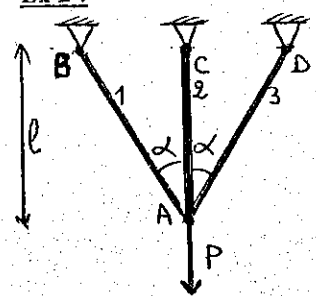
Barre	1	2	3	4	5	6
N_i	P	$-P\sqrt{2}$	P	-P	$-P\sqrt{2}$	2P
l_i	ℓ	$\ell\sqrt{2}$	ℓ	ℓ	$\ell\sqrt{2}$	ℓ
U_i	$P^2\ell / 2EA$	$2P^2\ell\sqrt{2} / 2EA$	$P^2\ell / 2EA$	$P^2\ell / 2EA$	$2P^2\ell\sqrt{2} / 2EA$	$4P^2\ell / 2EA$

$$\Rightarrow U = \frac{P^2\ell}{2EA} (7 + 4\sqrt{2})$$

Le déplacement vertical du point C est :

$$(\delta_c)_v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{P\ell}{EA} (7 + 4\sqrt{2})$$

Ex 2 :



Déterminons le déplacement du point A.

$$(\delta_A)_H = 0 \quad (\text{symétrie})$$

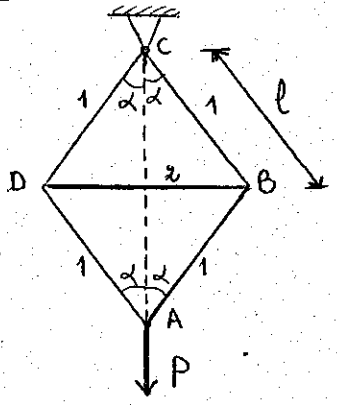
$$(\delta_A)_V = ? = \frac{\partial U}{\partial P}$$

On a déjà vu que : $N_1 = N_3 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$

$$N_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

D'où $U = \frac{P^2 l}{2 E A (1 + 2 \cos^3 \alpha)} \Rightarrow (\delta_A)_v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{P l}{E A (1 + 2 \cos^3 \alpha)}$

Ex 3 :



On trouve que :
 $(\delta_A)_v = \frac{P l}{E A} (1 + \tan^2 \alpha (1 + 2 \sin \alpha))$
 A. N. $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha = 45^\circ$
 $l = 1 \text{ m}$, $A = 2 \text{ cm}^2$
 $(\delta_A)_v = 0,426 \text{ cm}$
 $P = 5 \text{ tonnes}$

Autre variante (Numérique) de détermination des déplacements par Castigliano :

Jusqu'à présent on s'est arrangé pour avoir l'effort P, par rapport auquel on dérive, dans l'expression des R_j , N_j et U.
 Supposons que les forces extérieures, les réactions, les efforts intérieurs et par conséquent U sont connus numériquement.
 Par rapport à quoi doit on dériver ? Comment appliquer Castigliano ?
 Reprenons l'exo précédent :

n°	l_i (m)	S_i (kg)	S'_i
1	1	⊕ 3542	0,707
2	$\sqrt{2}$	- 5000	-1

$$U = \sum \frac{S_i^2 l_i}{2 E_i A_i} \quad (\delta_A)_v = \frac{\partial U}{\partial P} = \sum_{i=1}^n \frac{2 S_i l_i}{2 E_i A_i} \frac{\partial S_i}{\partial P}$$

$$(\delta_A)_v = \sum \frac{S_i l_i}{E_i A_i} \frac{\partial S_i}{\partial P}$$

D'une façon générale :
 Un système soumis à $P_1, \dots, P_j, \dots, P_n$
 $S_i = S_i(P_1, \dots, P_j, \dots, P_n)$
 D'après le principe de superposition : $S_i = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_j P_j + \alpha_n P_n$

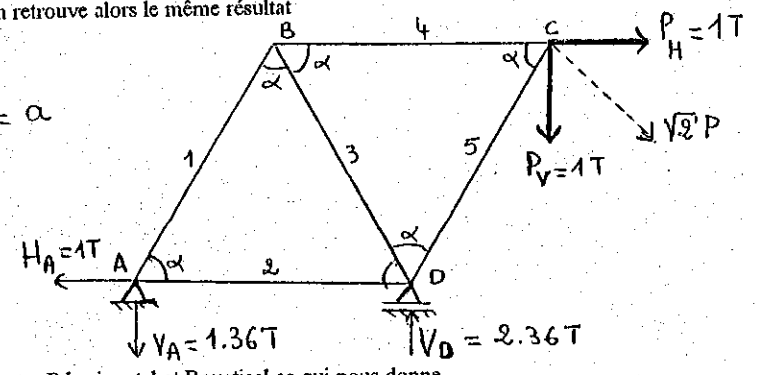
$$S'_i = \frac{\partial S_i}{\partial P_j} = \alpha_j = S_j \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_i = 0 & \text{si } i \neq j \\ P_i = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$(\delta_A)_v = \sum \frac{S_i l_i}{E_i A_i} S'_i$$

On retrouve alors le même résultat

Ex 4 :

$\alpha = 60^\circ$ $l_i = a$
 $E A = c t e$
 $(\delta_C)_H = ?$



1/ Méthode directe :

On doit faire la distinction entre P horizontal et P vertical ce qui nous donne V_A, H_A, V_D en fonction de P_H et P_V alors $S_i = S_i(P_H, P_V)$

$$(\delta_e)_v = \frac{\partial U}{\partial P_v} \quad \text{et} \quad (\delta_e)_H = \frac{\partial U}{\partial P_H}$$

2/ Méthode numérique :

$$(\delta_c)_H = \sum \frac{S_i l_i}{E F_i} S'_i$$

Par la méthode des nœuds on retrouve les S'_i

n°	S_i	l_i	S'_i
1	1,57	a	1
2	0,23	a	1/2
3	-1,57	a	-1
4	1,57	a	1
5	-1,15	a	0

Par l'équilibre des nœuds on retrouve les S'_i

$$(\delta_c)_H = \frac{a}{E R} \left(1,57 + \frac{0,23}{2} + 1,57 + 1,57 \right) = 4,825 \frac{a}{E A}$$

Si l'on avait dérivé par rapport à P.

Posons $X = P\sqrt{2}$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = (\delta_c)_{//2^{\text{e}} \text{ bissectrice}}$$

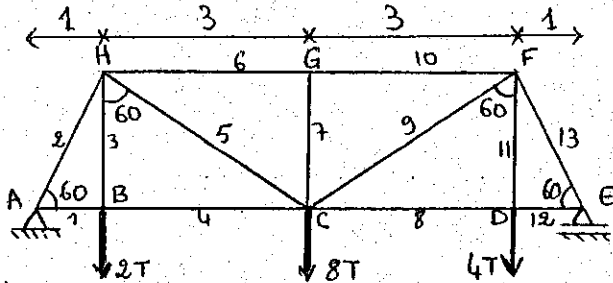
$$\frac{\partial U}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial P} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial U}{\partial X} \sqrt{2} = (\delta_c)_{//2^{\text{e}} \text{ bissectrice}} \times \sqrt{2}$$

Ex 5 :

Déterminer $(\delta_B)_v, (\delta_c)_v, (\delta_D)_v$

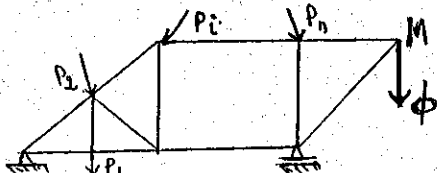
$E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$
 $A = 4 \text{ cm}^2$



Cas particuliers :

Il s'agit de trouver le déplacement :

- d'un point où ne s'exerce aucune force
- dans une direction différente de celle des forces appliquées.



$$(\delta_M)_v = ?$$

La méthode générale consiste à introduire une force \varnothing (dans la direction choisie), on conduit les calculs comme dans le cas normal et on annule \varnothing au niveau du résultat final.

$$\left. \begin{matrix} V_A, H_A \\ V_B, H_B \end{matrix} \right\} f(P_1, \dots, P_n, \varnothing)$$

$$S_i = S_i(P_1, \dots, P_n, \varnothing)$$

$$\dot{U}_i = U_i(P_1, \dots, P_n, \varnothing)$$

$$(\delta_M)_v = \left(\frac{\partial U}{\partial \varnothing} \right)_{\varnothing=0}$$

$$S_i = S_i(P_1, \dots, P_n, \varnothing) = S_i(P_1, \dots, P_n) + S_i(\varnothing)$$

$$U = \sum \frac{S_i(P_1, \dots, P_n, \varnothing)^2}{2E_i A_i} l_i$$

$$(\delta_M)_v = \left(\frac{\partial U}{\partial \varnothing} \right)_{\varnothing=0} = \left[\sum l_i \frac{2[S_i(P_1, \dots, P_n) + S_i(\varnothing)] \partial S_i(\varnothing)}{2E_i A_i} \right]_{\varnothing=0}$$

$$(\delta_M)_v = \sum \frac{S_i l_i}{E_i A_i} \frac{\partial S_i(\varnothing)}{\partial \varnothing} = \sum \frac{S_i l_i}{E_i A_i} S_i''$$

S_i'' l'effort dans la barre i si l'on donne à \varnothing une valeur unité.

Exercice : Reprenons l'exo 1

On demande $(\delta_c)_H$ on le fait par la méthode numérique. Après simplification, on trouve facilement:

$$S_1'' = S_6'' = 1, S_2'', S_3'', S_4'', S_5'' \text{ sont tous nuls}$$

$$(\delta_c)_H = \frac{a}{EA} (P + 2P) = \frac{3Pa}{EA}$$

2^{ème} application du théorème de Castigliano : Résolution des systèmes hyperstatiques (int et ext) : théorème de MENABREA.

Soit d'une façon générale un système :

hyperstatique extérieurement de d^{m} ($\exists m$ liaisons surabondantes)

hyperstatiques intérieurement de d^{n} ($\exists n$ barres surabondantes)

La méthode de résolution consiste à décomposer le système hyperstatique initial en $m + n + 1$ systèmes isostatiques (dits systèmes isostatiques associés) Il suffit ensuite d'écrire d'après CASTIGLIANO

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial R_j} = 0$$

X_i : étant l'effort hyperstatique inconnu dans une barre surabondante

R_j : la réaction hyperstatique inconnue au niveau d'une liaison surabondante.

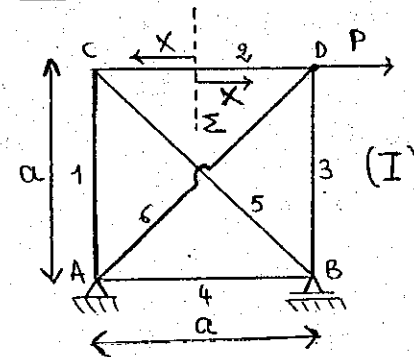
(X_i et R_j sont les grandeurs hyperstatiques inconnues du P_b)

Le terme $\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0$ traduit la continuité dans la barre surabondante

Le terme $\frac{\partial U}{\partial R_j} = 0$ traduit que le déplacement du point d'application de la liaison dans la réaction est égal à zéro.

Ces termes traduisent le fait que les grandeurs hyperstatiques sont des grandeurs qui minimisent l'énergie de déformation.

Ex : Soit le système suivant :



Le système est ext. isostatique intérieurement hyperstatique de d^{p} en effet

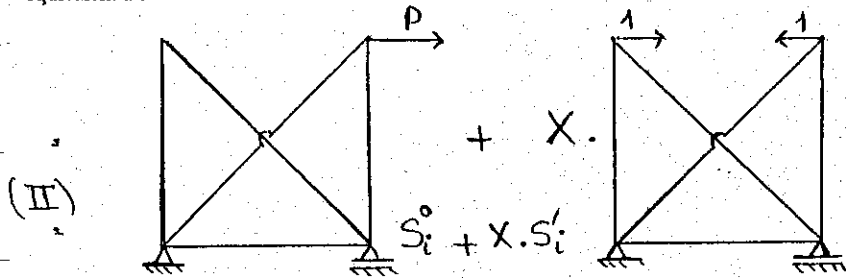
$$b = 2n - 3 \quad 2 \times 4 - 3 = 5 \neq 6$$

\exists une barre surabondante.

Prenons l'effort X dans la barre 2 inconnue hyperstatique du système.

On coupe la barre (2) par une section (Σ)

Ne connaissant pas le sens de l'effort X, on prendra un sens arbitraire (une traction). Le système est alors équivalent à :



* Si (I) : effort dans la barre i pour le système hyperstatique initial.

* S_i^1 (II) : effort dans la barre i si l'on supprime toutes les barres et les liaisons surabondantes et on garde les P_i

$$S_i = S_i \begin{cases} P_i \neq 0 \\ X_i = 0 \\ R_j = 0 \end{cases}$$

* S_i^1 (II) : effort dans la barre i si l'on supprime les P_i et on donne à X_i (ou R_j) une valeur unité.

Dans ces conditions on a :

$$S_i = S_i^0 + X S_i^1$$

$$U = \sum_{i=1}^6 \frac{S_i^2 l_i}{2E_i A_i} = \sum_{i=1}^6 \frac{(S_i^0 + X S_i^1)^2 l_i}{2E_i A_i}$$

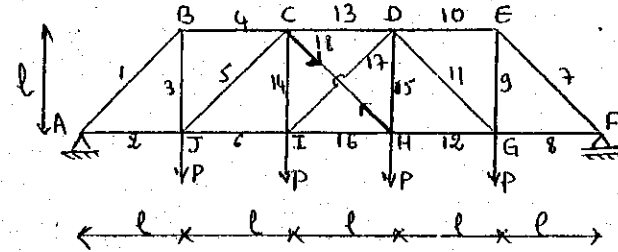
On applique le théorème de Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^6 \frac{2(S_i^0 + X S_i^1)}{2E_i A_i} S_i^1 l_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^6 \frac{S_i^0 S_i^1 l_i}{E_i A_i} + X \sum_{i=1}^6 \frac{S_i^1 S_i^1 l_i}{E_i A_i} = 0$$

$$\Rightarrow X = - \frac{\sum_{i=1}^6 \frac{S_i^0 S_i^1 l_i}{E_i A_i}}{\sum_{i=1}^6 \frac{S_i^1 S_i^1 l_i}{E_i A_i}}$$

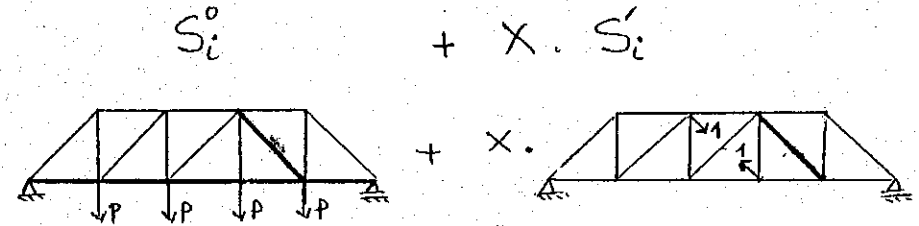
Ex 1 :



Déterminons les efforts intérieurs dans le système ci-dessus.

$$b = 2n - 3 \quad ; \quad 2 \times 10 - 3 = 17 \neq 18 \Rightarrow \text{hyper. de } d^0 1$$

Prenons l'effort X dans la barre 18 comme grandeur hyperstatique inconnue du problème. Le système est alors équivalent à :



n°	l_i	S_i^0/P	S_i^1	$\frac{S_i^0 S_i^1 l_i}{E_i A_i}$	n°	l_i	S_i^0/P	S_i^1	$\frac{S_i^0 S_i^1 l_i}{E_i A_i}$
1	$l\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	0	$-2\sqrt{2}$	10	1	-2	0	-2
2	1	2	0	2	11	$l\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$
3	1	2	0	2	12	1	3	0	3
4	1	-2	0	-2	13	1	-3	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5+\sqrt{2}}{2}$
5	$l\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	14	1	1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{2}}{2}$
6	1	3	0	3	15	1	1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{2}}{2}$
7	$l\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	0	$-2\sqrt{2}$	16	1	3	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{7-\sqrt{2}}{2}$
8	1	2	0	2	17	$l\sqrt{2}$	0	1	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$
9	1	2	0	2	18	$l\sqrt{2}$	0	1	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

CALCUL DES POUTRES: FLEXION

6.1 INTRODUCTION

Les poutres sont des éléments structuraux généralement droits, ayant le plus souvent une section prismatique avec habituellement au moins un axe de symétrie, que l'on retrouve dans toutes les constructions de génie civil et dans de nombreux systèmes mécaniques.

Un élément structural sera appelé "poutre" si la section est petite par rapport à sa longueur et s'il est soumis à des efforts qui produisent des efforts tranchants et des moments fléchissants. Une poutre peut également être soumise en plus à des efforts axiaux et à des moments de torsion.

Dans ce chapitre, on cherchera à calculer les contraintes et les déformations dans des poutres droites ayant des sections avec au moins un axe de symétrie, dues aux efforts tranchants V et aux moments de flexion M .

On considérera des poutres isostatiques soumises à des forces et à des couples concentrés, à des charges réparties uniformément ou triangulairement et ayant des sections rondes, rectangulaires, en T, en I et en caisson.

On calculera successivement:

- les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants permettant de définir dans quelle section, les efforts sont maximums
- les contraintes dues à V et à M
- les déformations dues à M

6.2 DIAGRAMMES DES EFFORTS TRANCHANTS ET DES MOMENTS FLÉCHISSANTS

6.2.1 Méthode des sections

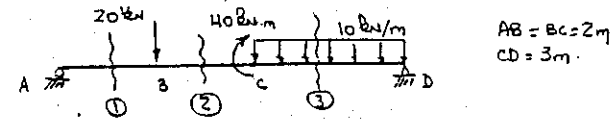
Les efforts internes, appliqués au centroïde d'une section, sont calculés avec la méthode des sections qui consiste à couper la membrure en deux parties, à faire le DCL de l'une des deux parties, et à appliquer les équations d'équilibre.

Afin d'obtenir les valeurs de V et M tout le long d'une membrure, il faudrait alors faire une multitude de coupes. Le même résultat est obtenu en

faisant une coupe à une distance x d'une extrémité et en faisant varier cette distance x .

Comme les équations d'équilibre seront différentes à chaque fois qu'une nouvelle force interviendra, on fera une coupe entre chaque force ou couple concentré et à travers chaque force répartie différente.

Cette procédure est montrée dans l'exemple suivant:

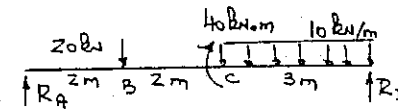


La poutre est soumise à une force concentrée en B, à un couple concentré en C et à une charge uniformément répartie sur CD.

On fera 3 coupes telles que montrée, et on fera l'équilibre des éléments A-1, B-2 et C-3.

Avant toute chose, il faut calculer les réactions aux appuis.

Calcul des réactions aux appuis



$$\Sigma M_D = -7 R_A + (20 \times 5) - 40 + (30 \times 1,5) = 0 \text{ donc } R_A = 15 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_Y = 15 - 20 - 30 + R_D = 0 \text{ donc } R_D = 35 \text{ kN}$$

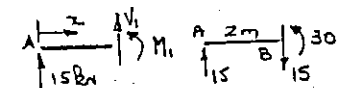
Équilibre de l'élément AB

$$\Sigma F_Y = 15 + V_1 = 0, \quad V_1 = -15 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = M_1 - 15x = 0, \quad M_1 = 15x$$

pour $x = 0$, $M_A = 0$ et $V_A = -15 \text{ kN}$

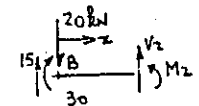
pour $x = 2 \text{ m}$, $M_B = 30 \text{ kN}\cdot\text{m}$ et $V_B = -15 \text{ kN}$



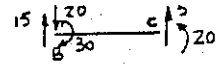
Équilibre de l'élément BC

$$\Sigma F_Y = -20 + 15 + V_2 = 0, \quad V_2 = 5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 20x - 15x - 30 + M_2 = 0, \quad M_2 = -5x + 30$$



pour $x = 0$, $M_B = 30 \text{ kN}\cdot\text{m}$ et $V_B = 5 \text{ kN}$
 pour $x = 2 \text{ m}$, $M_C = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}$ et $V_C = 5 \text{ kN}$



Équilibre de l'élément cd

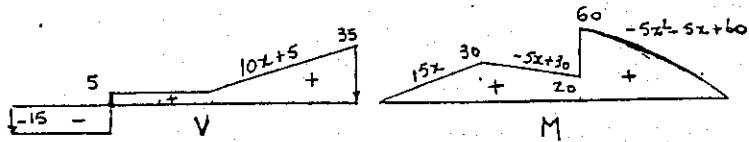
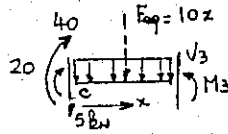
$\Sigma F_Y = -5 - 10x + V_3 = 0$, $V_3 = 10x + 5$

$\Sigma M_3 = 5x + \frac{10x^2}{2} - 20 - 40 + M_3 = 0$

$M_3 = -5x^2 - 5x + 60$

pour $x = 0$, $V_C = 5 \text{ kN}$ et $M_C = 60 \text{ kN}\cdot\text{m}$

pour $x = 3 \text{ m}$, $V_D = 35 \text{ kN}$ et $M_D = 0$



Les tracés des DET et DMF doivent:

- montrer toutes les valeurs caractéristiques de V et M (valeurs nulles, maximums, sauts...)
- vérifier les équations d'équilibre en chaque point de la poutre.

Ainsi comme V et M sont des efforts internes qui équilibrent les forces externes en chaque point:

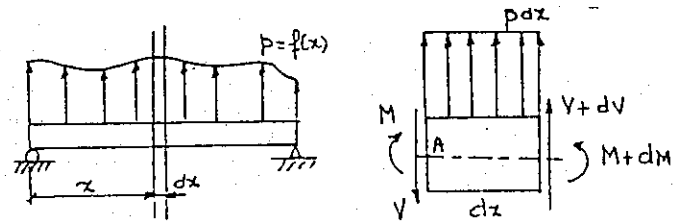
- L'effort tranchant à l'origine est l'inverse de la force appliquée en ce point (R_A dans notre cas).
- Il y a un saut dans le DET ou le DMF égal et opposé à la force ou au couple concentré appliqué.
- Le DET doit être fermé avec une force égale et opposée à la force appliquée à l'extrémité de la poutre (R_D dans notre cas).
- Les moments sont nuls aux appuis rotulés à moins qu'il y ait un couple concentré appliqué.
- Le DET est la dérivée du DMF (avec un signe inverse).
- Le DMF est l'intégrale du DET (avec un signe inverse).

La méthode des sections est basée sur les équations d'équilibre, mais elle devient complexe lorsque la structure comporte plusieurs charges.

Une méthode plus rapide est la méthode d'intégration présentée ci-après.

6.2.2 Méthode d'intégration

Écrivons les relations qui existent entre la charge quelconque répartie $p(x)$, l'effort tranchant $V(x)$ et le moment fléchissant $M(x)$.



$\Sigma F_Y = -V + p dx + (V + dV) = 0$, soit $p = -\frac{dV}{dx}$

$\Sigma M_A = -M + (M + dM) + (V + dV) dx + p dx \cdot \frac{dx}{2} = 0$

soit $dM + V dx + dV dx + p \cdot \frac{dx^2}{2} = 0$

En considérant $dV dx = p \cdot \frac{dx^2}{2} = 0$ (infinitement petit du 2^e ordre), il vient:

$dM + V dx = 0$, soit $V = -\frac{dM}{dx}$ et $p = \frac{d^2 M}{dx^2}$

À une distance x de l'appui, on a donc:

$V(x) = \int_0^x dV = \left[-\int_0^x p dx \right] + V_0$

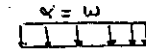
$M(x) = \int_0^x dM = \left[-\int_0^x V dx \right] + M_0$

• charge uniformément répartie vers le bas

$p(x) = -\alpha$

$V(x) = \alpha x + V_0$

$M(x) = -\frac{\alpha x^2}{2} - V_0 x + M_0$



• charge triangulaire vers le bas

$$p(x) = -\alpha x = -\frac{hx}{L}$$

$$V(x) = \frac{\alpha x^2}{2} + V_0$$

$$M(x) = -\frac{\alpha x^3}{6} - V_0 x + M_0$$

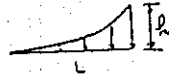
• charge parabolique vers le bas



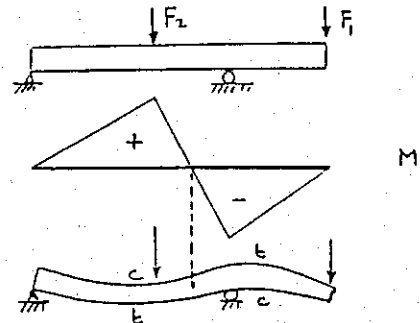
$$p(x) = -\alpha x^2 = -\frac{hx^2}{L^2}$$

$$V(x) = \frac{\alpha x^3}{3} + V_0$$

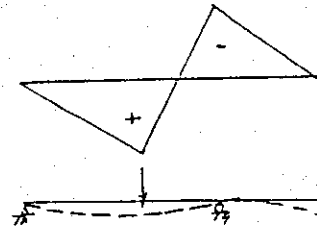
$$M(x) = -\frac{\alpha x^4}{12} - V_0 x + M_0$$



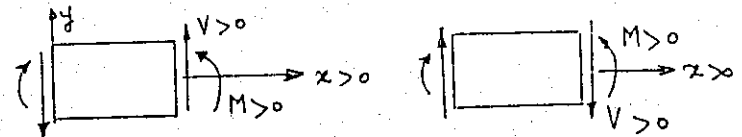
- Connaissant les charges sur une poutre, on peut calculer le DET et le DMF tout le long de la poutre en faisant deux fois l'intégrale.
- Inversement, connaissant le DMF, on peut retrouver les charges sur la poutre en dérivant 2 fois.
- Le DET et le DMF sont dépendants l'un de l'autre.
- Le DET et le DMF représentent d'une façon réelle les efforts en tout point d'une poutre.
- Le moment fléchissant est maximal, lorsque l'effort tranchant est nul.
- Pour les expressions de $V(x)$ et $M(x)$ dont le terme de plus haut degré est en x^2 la concavité des courbes est vers les y positifs si le terme en x^2 est positif (et inversement lorsque le terme en x^2 est négatif).
- En résistance des matériaux, il est primordial de connaître la forme de la déformée d'une poutre en flexion. Lorsque les moments sont positifs, la fibre inférieure est en tension; lorsque les moments sont négatifs, la fibre supérieure est en tension.



- On dessinera souvent le diagramme des moments positifs vers le bas par analogie avec le sens de la déformée; il faudra alors indiquer le signe + vers le bas.



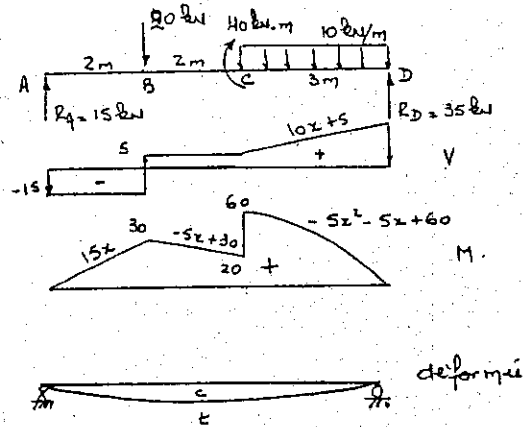
- Dans les expressions $p = -\frac{dV}{dx}$ et $V = -\frac{dM}{dx}$, la convention de signe est la suivante: M et V sont positifs dans le sens trigonométrique et selon l'axe Y positif sur une face positive (c'est-à-dire qui a une normale dans le sens de $x > 0$). Dans certains livres de résistance des matériaux (notamment le livre de Popov) on trouvera une autre convention de signes.



On a alors $p = + \frac{dV}{dx}$ et $V = + \frac{dM}{dx}$

Seul le signe de l'effort tranchant est inversé par rapport à la convention de signe précédente.

Recommençons le problème précédent avec la méthode par intégration:



AB) $0 \leq x \leq 2$

$$p(x) = 0$$

$$V(x) = - \int p dx + V_0 = -15$$

$$M(x) = - \int V dx + M_0 = 15x$$

$$V_A = -15, V_B = -15$$

$$M_A = 0, M_B = 30$$

CD) $0 \leq x \leq 3$

$$p(x) = -10$$

$$V(x) = - \int p dx + V_0 = 10x + 5$$

$$M(x) = - \int V dx + M_0 = -5x^2 - 5x + 60$$

$$V_C = 5, V_D = -35$$

$$M_C = 60, M_D = 0$$

BC) $0 \leq x \leq 2$

$$p(x) = 0$$

$$V(x) = - \int p dx + V_0 = 5$$

$$M(x) = - \int V dx + M_0 = -5x + 30$$

$$V_B = 5, V_C = 5$$

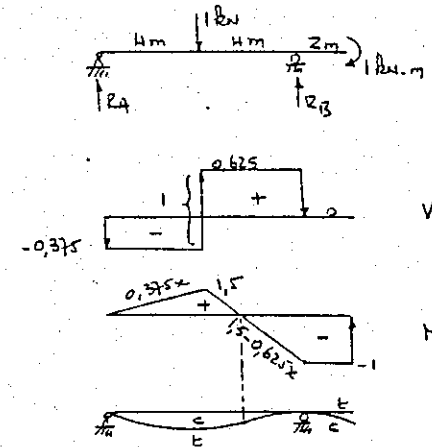
$$M_B = 30, M_C = 20$$

Exemple 1

$$\Sigma M_A = 8 R_B - (4 \times 1) - 1 = 0, \text{ donc } R_B = 5/8 = 0,625 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_Y = R_A - 1 + 0,625 = 0, \text{ donc } R_A = 3/8 = 0,375 \text{ kN}$$

Lorsque les charges sont simples, le DET et le DMF doivent être construits sans aucun calcul, en suivant les principes donnés à la page 5.



Exemple 2

$$\Delta C \quad V = - \int p dx + V_A = -4 \quad \left\{ \begin{array}{l} V_C = -4 \text{ kN} \\ M_C = 12 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{array} \right.$$

$$M = - \int V dx + M_A = 4x \quad \text{à } x = 3 \text{ m.}$$

$$\Delta D \quad V = - \int p dx + V_C = \int 3,33 x dx + V_C = 1,66x^2 - 4$$

$$M = - \int V dx + M_C = - \int (1,66x^2 - 4) dx + 12 = -0,55x^3 + 4x + 12$$

à $x = 2$ m, $V_D = 2,66$ kN, $M_D = 15,55$ kN·m.

$$\Delta E \quad V = - \int p dx + V_D = - \int (-6,66 - 3,33x) dx + (2,66 - 36)$$

soit $V = 1,66x^2 + 6,66x - 33,33$

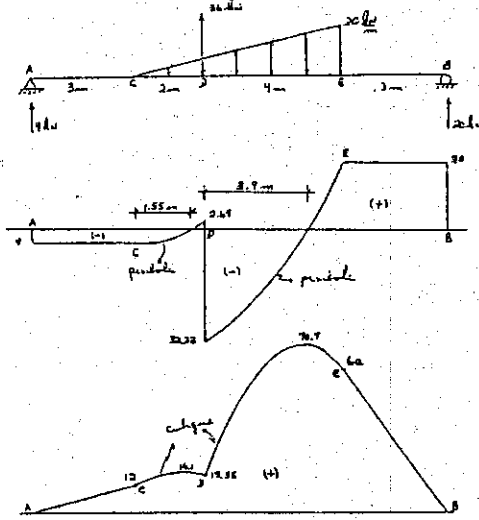
$$M = - \int V dx + M_D = - \int (1,66x^2 + 6,66x - 33,33) dx + 15,55$$

soit $M = -0,55x^3 - 3,33x^2 + 33,33x + 15,55$

à $x = 4$ m, $V_E = 20$ kN et $M_E = 60$ kN·m
 $V = 0$ pour $x = 2.9$ m, donc $M_{max} = 70.7$ kN·m

et

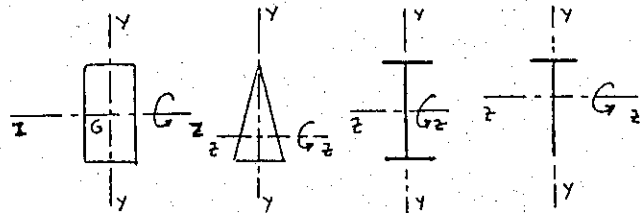
EB $V = - \int p dx + V_E = -20$, $M = - \int V dx + M_E = -20x + 60$
 à $x = 3$ m, $V_B = 20$ kN et $M_B = 0$



6.3 CONTRAINTES DUES AU MOMENT FLÉCHISSANT

6.3.1 Hypothèses de calcul

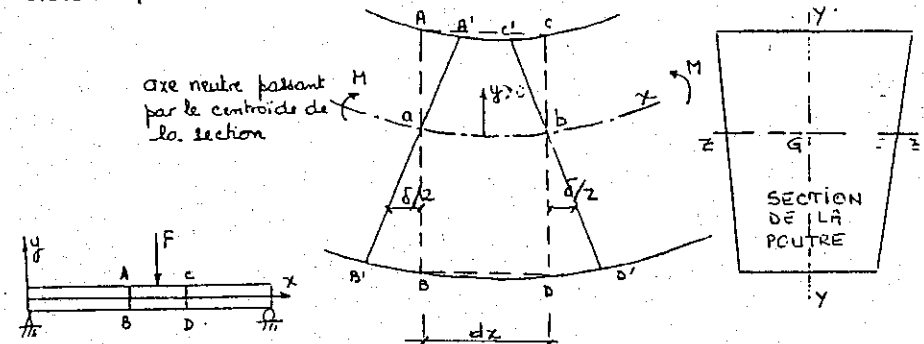
On se limitera au calcul des contraintes de flexion dans des poutres dont la section a au moins un axe de symétrie et pour lesquelles la flexion agit perpendiculairement à cet axe de symétrie.



Les hypothèses de calcul sont les suivantes:

- les poutres sont rectilignes
- les sections ont au moins un axe de symétrie
- le moment de flexion agit dans le plan de symétrie
- les déformations sont petites (domaine élastique)
- les sections transversales planes restent planes après déformations

6.3.2 Équation de la flexion

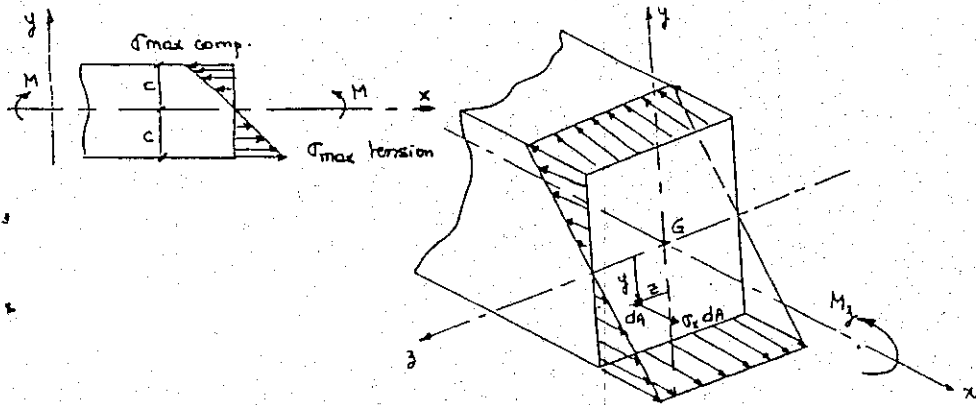


- Sur l'axe neutre passant par le centroïde, la déformation (tension ou compression) est nulle donc, d'après la loi de Hooke $\sigma = E\epsilon$, les contraintes sont nulles sur l'axe neutre.
- L'allongement δ est proportionnel à la distance y par rapport à l'axe neutre, donc par unité de longueur:

$$\frac{\delta}{dx} = \epsilon_x = -K y = \frac{\sigma_x}{E} \text{ donc } \sigma_x = -K \cdot E \cdot y = -K' y$$

la déformation est positive lorsque y est négatif et inversement. ($M > 0$)

Dans une section, les contraintes sont réparties comme suit:



Calculons la valeur de la constante K' . Considérons l'équilibre de la section sous l'effet du moment extérieur M_z et des contraintes internes σ_x . Le moment M_z est égal à la somme des moments de chaque petite force $f = \sigma_x dA$ par rapport à l'axe z . Les équations d'équilibre s'écrivent comme suit:

- La somme des forces en x donne:

$$\Sigma F_x = \int_A \sigma_x dA = \int_A -K' \cdot y \cdot dA = -K' A \bar{y} = 0$$

Comme $K'A \neq 0$ on a $\bar{y} = 0$, ce qui signifie que l'axe neutre passe par le centroïde de la section.

- La somme des moments par rapport à l'axe y donne:

$$\Sigma M_y = \int_A \sigma_x dA \cdot z = \int_A -K' \cdot y \cdot z \cdot dA = -K' I_{yz} = 0$$

Comme $K' \neq 0$, on a $I_{yz} = 0$ ce qui signifie que la section a au moins un axe de symétrie (voir chapitre 4).

- La somme des moments par rapport à l'axe z donne:

$$M_z = \int \sigma_x dA \cdot y = +K' \int y^2 dA = +K' I_z$$

donc $K' = + \frac{M_z}{I_z}$ et $\sigma_x = - \frac{M_z \cdot y}{I_z}$ ($\sigma_x < 0$ quand $y > 0$ et $M_z > 0$)

D'une manière générale: $\sigma_x = \pm \frac{M_z}{I_z} \cdot y$ et $\sigma_{x \max} = \pm \frac{M_z}{I_z} \cdot c$

où

c est la distance entre l'axe neutre et le point de la section le plus éloigné de l'axe neutre.

De même pour un moment M_y agissant dans le plan de l'axe de symétrie z (flexion autour de l'axe y), on a:

$$\sigma_x = \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

Donc dans une section soumise à un moment de flexion:

- les contraintes sont maximales sur les fibres extrêmes
- les contraintes sont d'autant plus grandes que le moment d'inertie est petit; il y a donc intérêt à appliquer un moment de flexion autour de l'axe pour lequel le moment d'inertie est le plus grand
- les contraintes sont faibles autour de l'axe neutre; il y a donc intérêt à éloigner la matière de l'axe neutre
- les contraintes de flexion sont des contraintes axiales.

On écrit encore $\sigma = \frac{M}{S}$, où S est le module de section égal à $\frac{I}{c}$.

6.3.3 Design des poutres en flexion

- Si les charges sont connues

- Tracer le DMF
- Calculer le moment maximal positif et le moment maximal négatif
- Si la section de la poutre est inconnue, choisir une section et calculer σ_{\max} due aux charges avec:

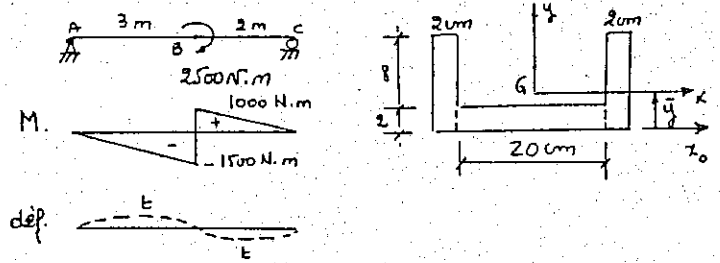
$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_{\max} \cdot c}{I}$$
- Comparer σ_{\max} avec $\sigma_{adm} = \sigma_0 / F.S.$
 - si $\sigma_{\max} > \sigma_{adm}$, recommencer avec une autre section
 - si $\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}$ OK

- Si les charges sont inconnues

- Et si la section est connue, calculer $M_{\max} \leq \frac{\sigma_{adm} \cdot I}{c}$ et calculer ensuite les charges admissibles.

Exemple I

Calculer les contraintes de flexion maximales à la section B



Calcul de I_{X_G} et de I_{X_0}

$$\bar{y} = \frac{(20 \times 2 \times 1) + (2 \times 10 \times 2 \times 5)}{(20 \times 2) + (2 \times 10) \times 2} = 3 \text{ cm} = 3 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$I_{X_0} = \left(2 \times \frac{1}{3} \times 2 \times 10^3 \right) + \left(\frac{1}{3} \times 20 \times 2^3 \right) = 1387 \text{ cm}^4$$

$$I_{X_G} = I_{X_0} - A d^2 = 1387 - (80 \times 3^2) = 667 \text{ cm}^4 = 667 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

Contraintes à la section B

À gauche de B

$$\sigma_{\max t} = \frac{1500 \times 7 \times 10^{-2}}{667 \times 10^{-8}} = 15,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max c} = \frac{-1500 \times 3 \times 10^{-2}}{667 \times 10^{-8}} = -6,7 \text{ MPa}$$

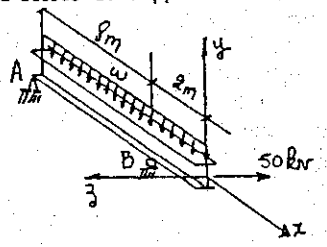
À droite de B

$$\sigma_{\max t} = \frac{1000 \times 3 \times 10^{-2}}{667 \times 10^{-8}} = 4,5 \text{ MPa}$$

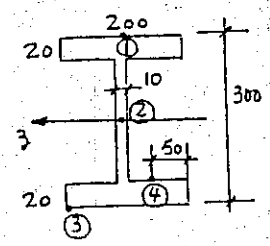
$$\sigma_{\max c} = \frac{-1000 \times 7 \times 10^{-2}}{667 \times 10^{-8}} = -10,5 \text{ MPa}$$

Exemple II

Calculez les contraintes de flexion aux points 1, 2, 3 et 4 d'une section prise au-dessus de l'appui B.

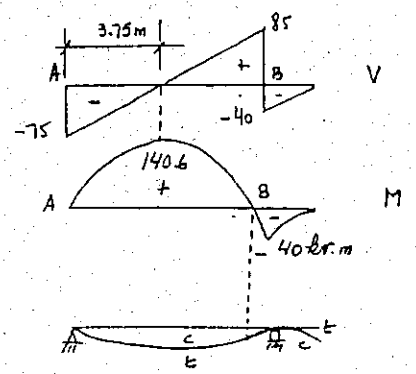


$w = 30 \text{ kN/m}$



1- Plan xy

$$I_z = \frac{bh^3}{12} - \frac{b'h'^3}{12} = \frac{200 \times 300^3}{12} - \frac{190 \times 260^3}{12} = 1,72 \times 10^8 \text{ mm}^4$$



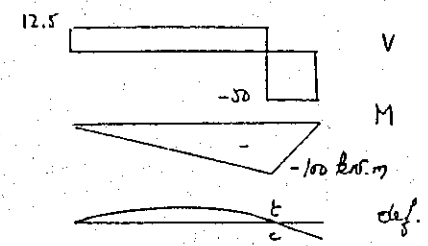
$$\sigma_1 = \frac{40 \times 10^6 \times 150}{1,72 \times 10^8} = 34,9 \text{ MPa (tension)}$$

$\sigma_2 = 0$

$\sigma_3 = -34,9 \text{ MPa (compression)}$

$$\sigma_4 = \frac{40 \times 10^6 \times 130}{1,72 \times 10^8} = -30,23 \text{ MPa (compression)}$$

2- Plan xz



$$I_y = \left(2 \times \frac{20 \times 200^3}{12} \right) + \left(\frac{260 \times 10^3}{12} \right) = 0,27 \times 10^8 \text{ m}^4$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$$

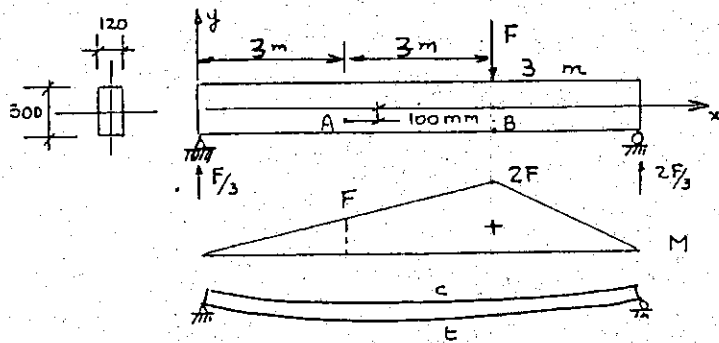
$$\sigma_3 = \frac{100 \times 10^6 \times 100}{0,27 \times 10^8} = 370,4 \text{ MPa (tension)}$$

$$\sigma_4 = -\frac{100 \times 10^6 \times 50}{0,27 \times 10^8} = -185,2 \text{ MPa (compression)}$$

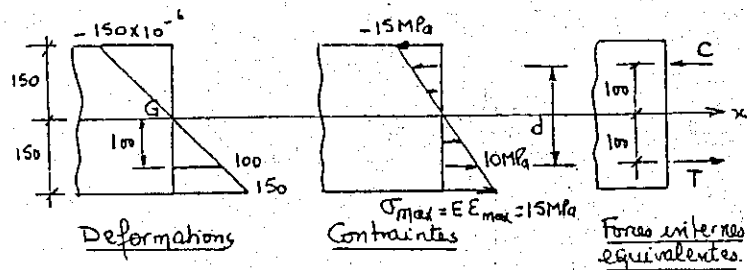
Exemple III (optionnel)

1- Connaissant les déformations en un point sur une poutre, calculez les forces qui produisent ces déformations.

Dans l'exemple montré, on donne: $\varepsilon_{XA} = 100 \times 10^{-6}$ et $E = 100\,000 \text{ MPa}$



Considérons les déformations, les contraintes et les forces internes dans une section verticale au point A.



Le moment interne à la section A est égal au couple:

$$M = Cd = Td = 200 T = 200 \times [15 \times (120 \times 150)/2] = 27 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Ce moment est aussi égal à F (voir DMF), donc: $M = 27 \text{ kN}\cdot\text{m}$.

Faisons la vérification en calculant la contrainte en A, par la formule de la flexion pour la poutre chargée avec $F = 27 \text{ kN}$

$$\sigma_A = \frac{M_A \cdot c_A}{I_z}$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{120 \times 300^3}{12} = 27 \times 10^7 \text{ m}^4, \quad c_A = 100 \text{ mm}$$

avec:

$$M_A = \frac{3 \times 27}{3} = 27 \text{ kN}\cdot\text{m} = 27 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}$$

et

$$\text{il vient: } \sigma_A = \frac{27 \times 10^6 \times 100^2}{27 \times 10^7} = 10 \text{ MPa}$$

2- Sachant que $\sigma_{admissible} = 100 \text{ MPa}$, calculez la valeur admissible de F

La contrainte maximale due aux charges se situe sur une fibre extrême à la section B, en dessous de la force F (endroit où le moment est maximal).

Si un moment M de $27 \text{ kN}\cdot\text{m}$ produit une contrainte sur la fibre inférieure égale à 15 MPa à la section A, un moment M de $54 \text{ kN}\cdot\text{m}$ produit une contrainte maximale de 30 MPa au point B. Ces deux moments sont dus à une force $F = 27 \text{ kN}$ appliquée à la section B. Pour produire une contrainte σ_{adm} de 100 MPa au point B, il faut donc que:

$$F_{adm} = \frac{27 \times 100}{30} = 90 \text{ kN}$$

Vérifions avec la relation:

$$\sigma_{adm} = \frac{M_{adm} \cdot c_{max}}{I_z} = \frac{90 \times 2 \times 10^6 \times 150}{27 \times 10^7} = 100 \text{ MPa}$$

Energie potentielle de déformation due à un moment fléchissant :

Rappel : pour l'effort normal nous avons montré que l'énergie potentielle de déformation

$$\text{est : } U = \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EF}$$

De la même façon nous démontrons que l'énergie potentielle de déformation due à un moment de flexion M est :

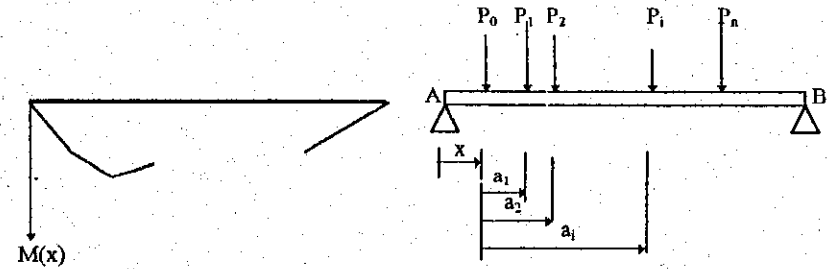
$$U = \int_0^l \frac{M_s^2(x) dx}{2EI_s}$$

Théorème de Barré : convoi de charges ou charges mobiles :

Soit une poutre isostatique (sur 2 appuis simples) soumise à l'action d'un convoi de charge. Dans quelle section se produira alors le moment maximal ?

Sous l'action de convoi de charges le diagramme des moments fléchissants aura une allure de polygone (ligne brisée). Dans ces conditions la section Σ où se produira le moment fléchissant maxi sera situé à la verticale d'une certaine charge P_k.

Soit M_k le moment fléchissant à la verticale de la charge P_k :



$$V_A = P_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \sum_{i=1}^n P_i \left(1 - \frac{x}{l} - \frac{a_i}{l}\right)$$

$$M_k = V_A(x + a_k) - P_0 a_k - \sum_{j=1}^{k-1} P_j (a_k - a_j)$$

$$M_{k \text{ max}} \Rightarrow \frac{dM_k}{dx} = 0 \Leftrightarrow V_A + \frac{dV_A}{dx}(x + a_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow P_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \sum_{i=1}^n P_i \left(1 - \frac{x}{l} - \frac{a_i}{l}\right) + (x + a_k) \left(-\frac{P_0}{l} - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n P_i\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P_0 + \sum_{i=1}^n P_i)l - (P_0 x + \sum_{i=1}^n P_i(x + a_i)) - (x + a_k)(P_0 + \sum_{i=1}^n P_i) = 0$$

soit R la résultante de toutes les charges P_i, située à une distance X_R par rapport à l'appui A :

$$R = P_0 + \sum_{i=1}^n P_i$$

$$R \times X_R = P_0 x + \sum_{i=1}^n P_i(x + a_i)$$

Alors les équations précédentes deviennent en fonction de R :

$$R \times l - R \times X_R - (x + a_k)R = 0$$

$$l - X_R - (x + a_k) = 0$$

$$\frac{X_R + (x + a_k)}{2} = \frac{l}{2}$$

Donc R et P_k sont disposées d'une façon symétrique par rapport à l'axe de symétrie de la poutre

FLEXION DEVIEE

1) Introduction :

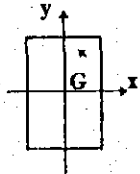
Une section d'une poutre est dite soumise à la flexion déviée si elle est soumise à une double flexion. (Flexion dans les deux plans de la section)

La flexion déviée peut être due à :

1. une double flexion pure ;
2. une double flexion simple ;
3. une flexion pure et une flexion simple ;
4. un chargement unique agissant en dehors des plans principaux.

Dans tous ces cas la section Σ est soumise à un moment résultant M qui n'est porté ni par l'axe x ni par l'axe y .

2) Contraintes en flexion déviée :



Par superposition des contraintes nous obtenons :

$$\sigma(x, y) = -\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

D'après l'équation de $\sigma(x, y)$ l'épure spatiale du diagramme des contraintes est un plan.

3) Axe neutre :

l'axe neutre est caractérisé par $\sigma(x, y) = 0$ (l'ensemble des points de la section droite qui ne sont ni comprimés ni tendus).

$$\sigma(x, y) = -\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = 0 \text{ d'où l'équation de l'axe neutre dans le plan } xGy$$

$$y = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} x$$

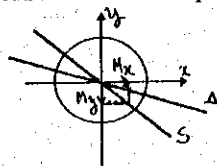
Il s'agit d'un axe central mais qui est différent de l'axe Gx et de l'axe Gy .

Remarques :

- on retrouve les cas particuliers de la flexion pure ou la flexion simple :
si $M_y = 0$ l'axe neutre est porté par $y = 0$
si $M_x = 0$ l'axe neutre est porté par $x = 0$
- Dans le cas de la flexion simple (ou pure) l'axe neutre est porté par la direction du moment donc l'axe neutre était en même temps le support de M .
- Pour la flexion déviée ce n'est pas généralement le cas, l'axe neutre se trouve dévié par rapport au support du moment résultant.

$$y = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} x \quad (\Delta) \text{ direction de l'axe neutre}$$

$$y = -\frac{M_y}{M_x} x \quad (S) \text{ direction du moment résultant}$$



Le fait que l'épure de la contrainte est plane, la contrainte en un point est fonction linéaire de la distance à l'axe neutre. Donc les contraintes maximales de traction et de compression se produisent aux points les plus éloignés de l'axe neutre.

FLEXION COMPOSEE

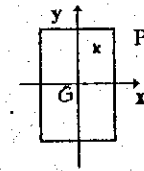
1) Introduction :

Une section d'une poutre est soumise à la flexion composée si elle est soumise en même temps à une flexion pure ou simple et un effort normal.

La flexion composée peut être due à :

1. un moment de flexion et un effort normal centré ;
2. un effort normal seul excentré ;
3. superposition des deux cas précédents ;
4. effort normal centré avec une pièce courbe.

2) Contraintes en flexion composée :



Par superposition des contraintes nous obtenons :

$$\sigma(x, y) = \sigma_1(N) + \sigma_2(M)$$

$$\sigma(x, y) = \frac{N}{F} - \frac{M}{I} y$$

N est l'effort normal ; F est la section ; M est le moment de flexion.

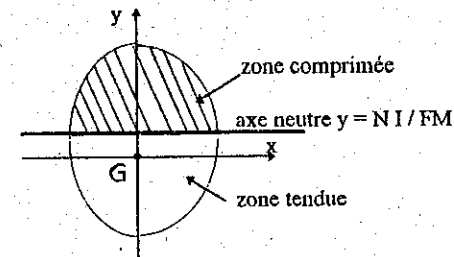
3) Axe neutre :

l'axe neutre est caractérisé par $\sigma(x, y) = 0$ (l'ensemble des points de la section droite qui ne sont ni comprimés ni tendus).

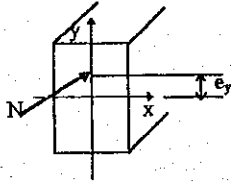
$$\sigma(x, y) = \frac{N}{F} - \frac{M}{I} y = 0 \text{ d'où l'équation de l'axe neutre dans le plan } xGy$$

$$y = \frac{NI}{FM}$$

Ce n'est plus un axe central (ne passe plus par G) mais il reste perpendiculaire au plan moyen et parallèle à l'axe neutre dans le cas de la flexion simple ou pure.



4) Cas de la flexion due à un effort normal N excentré de e_y :



L'effort normal est N et le moment de flexion est $M_x = -Ne_y$ par convention

Dans ce cas la formule donnant la position de l'axe neutre est donnée par :

$$y = \frac{N I_x}{F M_x} = -\frac{N I_x}{F N e_y} = -\frac{I_x}{F e_y}$$

*Centre de pression et noyau central d'une section :

Contrairement à la flexion pure et simple l'axe neutre en flexion composée peut être situé en dehors de la section. C'est-à-dire, physiquement que les différents points d'une section peuvent être soumis à des contraintes de même nature (soit une compression soit une traction).

Définition du centre de pression :

On appelle centre de pression C le point fictif ou réel où doit s'appliquer l'effort normal N (réel) de façon à reproduire les mêmes facteurs de forces dans la section.

Définition du noyau central :

Le noyau central d'une section (F) est le lieu géométrique des centres de pression qui engendrent des contraintes de même nature dans toute la section.

Question : Dans quelle condition une section soumise à la flexion composée est totalement tendue ou comprimée ?

Réponse : Il faut que le centre de pression C soit à l'intérieur du noyau central.

Remarques :

- Le centre de gravité appartient au noyau central (cas de l'effort normal seul).
- La frontière du noyau central est caractérisée par des centres de pression qui engendrent des axes neutres qui sont tangents à la section (F)

FLEXION DÉVIÉE COMPOSÉE

Une section est soumise à la flexion déviée composée (F.D.C.) si elle est en même temps soumise à la flexion déviée et à un effort normal.

- La F.D.C. peut être due à un effort normal centré plus une double flexion.
- La F.D.C. peut également être due à un effort normal unique mais doublement excentré.

Contraintes en F.D.C.

Par superposition des contraintes nous obtenons :

$$\sigma(x, y) = \sigma_1(N) + \sigma_2(M_x) + \sigma_3(M_y)$$

$$\sigma(x, y) = \frac{N}{F} - \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

L'épure spatiale des contraintes normales est un plan

Axe neutre en F.D.C. $\sigma(x, y) = 0$

$$y = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} x + \frac{N I_x}{F M_x}$$

L'axe neutre n'est ni central ni parallèle aux axes centraux principaux.

Si on utilise les coordonnées du centre de pression $C(e_x, e_y)$ tel que $M_x = -Ne_y$ et $M_y = -Ne_x$ alors l'équation de l'axe neutre devient :

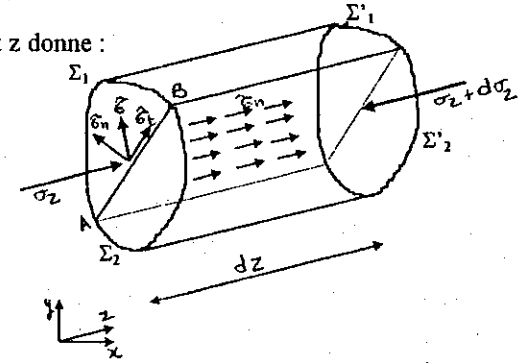
$$\frac{e_x}{I_y} x + \frac{e_y}{I_x} y = -\frac{1}{F}$$

CISAILLEMENT DU A L'EFFORT TRANCHANT

1- Contraintes et déformations dues à l'effort tranchant :

L'équilibre du prisme $\Sigma_1 \Sigma'_1$ suivant z donne :

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0 \\ \iint_{\Sigma_1} \sigma_z ds - \iint_{\Sigma_2} (\sigma_z + d\sigma_z) ds \\ + dz \int_{AB} \tau_n dl = 0 \\ \Rightarrow \int_{AB} \tau_n dl = \iint_{\Sigma} \frac{d\sigma_z}{dz} ds \end{aligned}$$



Or $\sigma_z = \frac{M_y}{I_x} \Rightarrow \frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{y}{I_x} \frac{dM}{dz} = \frac{yV_y}{I_x}$

d'où $\int_{AB} \tau_n dl = \iint_{\Sigma} \frac{yV_y}{I_x} ds = \frac{V_y}{I_x} \iint_{\Sigma} y ds$

Le flux de τ_n à travers la courbe AB est :

$$\int_{AB} \tau_n dl = \frac{V_y S_x^*}{I_x} \text{ avec } S_x^* \text{ le moment statique de la section } \Sigma_1 \text{ par rapport à l'axe } x$$

- * pour calculer τ_x et τ_y il faut prendre la coupe AB parallèle à Gy et à Gx
- * Dans la pratique, en théorie simplifiée, τ_x est négligée et τ_y est constante à un

niveau donné $\rightarrow (\tau_y)_{\text{moy}} = \frac{V_y S_x^*}{I_x b(y)}$ Formule de JOURAVSKI

Soit τ_0 la contrainte tangentielle moyenne au niveau de G :

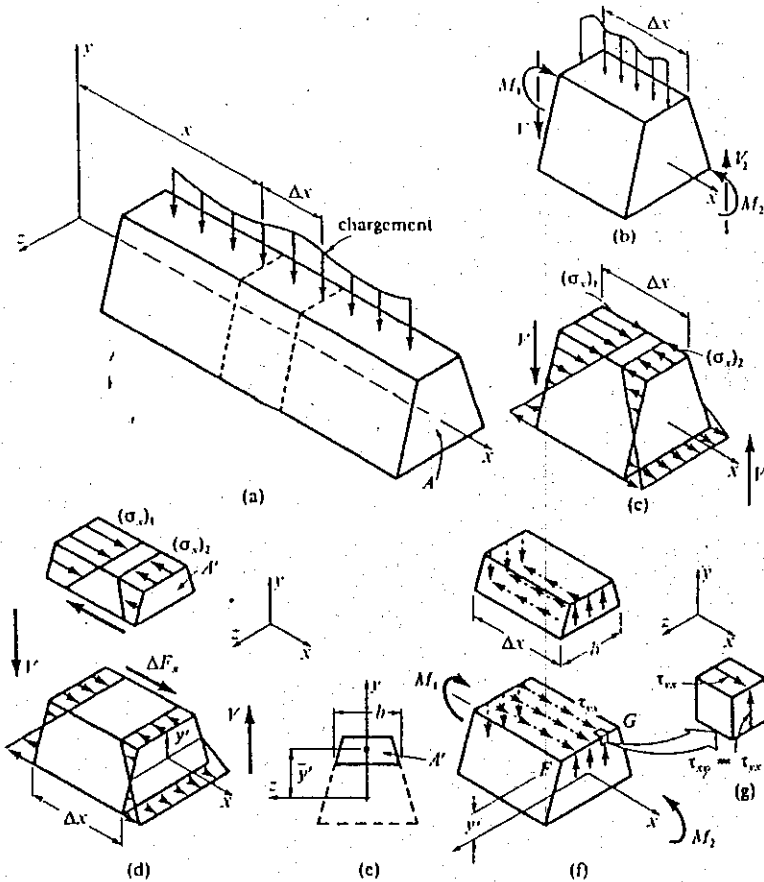
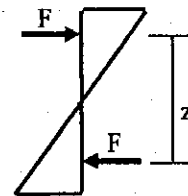
$$\tau_0 = \frac{V_y (S_x^*)_0}{I_x b_0} = \frac{V_y}{b_0 (S_x^*)_0}$$

F: résultante des forces de compression

$$F = \iint_{y>0} \sigma_x ds = \frac{M}{I_x} \iint_{y>0} y ds = \frac{M}{I_x} (S_x^*)_0 \text{ d'où :}$$

$$M = F \times \frac{I_x}{(S_x^*)_0} = Fz$$

z bras de levier du couple (F, -F)



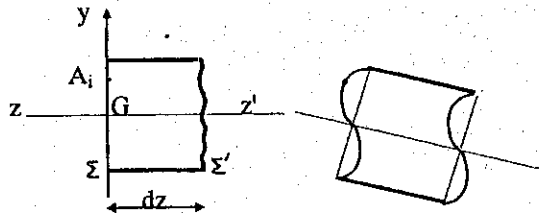
et par suite : $\tau_{yz} = \frac{V_y}{b_0 z}$

Rq 1 : dans l'expression $\tau(y) = \frac{V_y S_x^*}{I_x b(y)}$ S_x^* est maxi pour $y = 0$, de plus $b(y)$ est, sauf cas exceptionnel, mini pour $y = 0 \Rightarrow \tau(y)$ est maxial pour $y = 0$, l'expression de $\tau_{yz} = \frac{V_y}{b_0 z}$ donne donc, en général, la valeur maximale de τ

Rq 2 : pour les sections courantes on a $z = \alpha h$ avec $h =$ hauteur totale de la section et $0,7 < \alpha < 0,9$
La limitation des contraintes tangentielles passe donc par l'augmentation de la largeur b_0 ou la hauteur totale h .

Rq 3 : La section $b_0 z$ s'appelle la section réduite à l'effort tranchant.

Gauchissement des sections sous l'effet de V_y :



la contrainte $(\tau_y)_{A_i} = f(y)$ et puisque $\tau_{ij} = G \gamma_{ij}$ avec $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ donc les distorsions γ_y seront également fonction de $y \rightarrow$ la section ne peut rester plane \rightarrow Gauchissement

Energie de déformation due à V_y :

équilibre initial :

$V_y = 0 \rightarrow \tau_{zy} = 0, \gamma_{zy} = 0$

à l'état déformé final :

$V_y, \tau_{zy}, \gamma_{zy}, U ?$

Conformément au cours de MMC l'énergie de déformation par unité de volume est donnée par la formule :

$U = \frac{1}{2} \sigma \epsilon$ d'où l'énergie de déformation totale élémentaire

$dU_i = \frac{1}{2} \sigma \epsilon dV$

Dans le cas du cisaillement dû à l'effort tranchant V_y :

$\sigma = \tau_{yz}$ et $\epsilon = \gamma_{yz}$ et $dV = dS dz$ d'où l'expression de l'énergie :

$$dU_i = \frac{\tau_{zy} \gamma_{yz}}{2} dS dz = \frac{\tau_{zy}^2}{2G} dS dz$$

Dans une section donnée l'énergie devient :

$$U = \frac{dz}{2G} \iint_{(\Sigma)} \tau_{zy}^2 dS$$

En remplaçant τ_{zy} par sa valeur on obtient :

$$U = \frac{dz}{2G} \iint_{\Sigma} \frac{V_y^2 (S_x^*)^2}{I_x^2 b^2(y)} b(y) dy$$

Qu'on peut écrire sous la forme finale pour la pièce entière :

$$U = \int_0^l \frac{V_y^2}{2GF_1} dz \quad \text{avec} \quad \frac{1}{F_1} = \frac{1}{I_x^2} \int_{(h)} \frac{(S_x^*)^2}{b(y)} dy$$

$F_1 =$ Section réduite relative au calcul de l'énergie de déformation due à V_y : c'est une caractéristique de la section.

ex : pour une section rectangulaire $b \times h$

$$F_1 = \left(\frac{bh^3}{12} \right)^2 / \int_{-h/2}^{h/2} \frac{b}{4} [\frac{h^2}{4} - y^2]^2 dy = \frac{5}{6} bh$$

En général on aura :

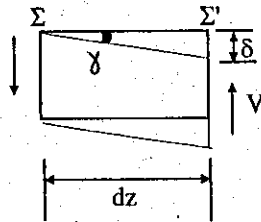
$$U = \int_0^l \left(\frac{N(z)^2}{2ES} + \frac{M(z)^2}{2EI_x} + \frac{V(z)^2}{2GF_1} \right) dz$$

Application: Déformation due à l'effort tranchant

D'après le théorème de Castigliano (voir plus loin)

$\frac{\partial U}{\partial V}$: déplacement relatif de deux sections voisines

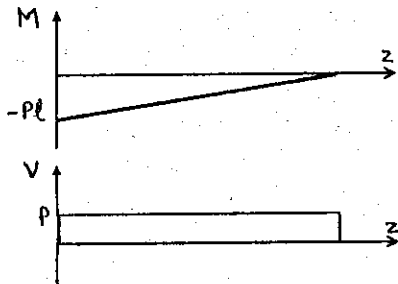
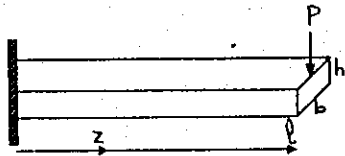
(Σ) et (Σ') distantes de dz sous l'effet de V



$$U = \frac{V^2 dz}{2 GF_1} \rightarrow \frac{\partial U}{\partial V} = \delta = \frac{V dz}{GF_1} = \gamma dz$$

donc $\delta = \frac{V dz}{GF_1}$ et $\gamma = \frac{V}{GF_1}$

Comparaison des déplacements dus à la flexion et à l'effort tranchant:



Le rapport $\frac{f_1}{f_2} = \frac{5}{3(1+\nu)} \left(\frac{l}{h}\right)^2$

Ce résultat montre qu'en général $\frac{f_1}{f_2}$ est élevé et que les déplacements dus à V peuvent être négligés devant ceux dus au moment de flexion.

Déplacement dû à $M(z)$:

$$\frac{d^2 v_1}{dz^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI} (l-z)$$

$$\Rightarrow v_1 = -\frac{P}{EI} \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right)$$

Soit pour $z=l$:

$$f_1 = -Pl^3 / 3EI$$

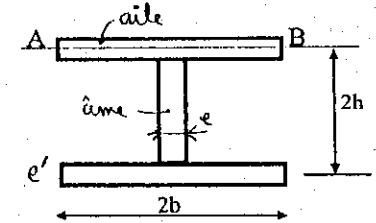
Déplacement dû à $V(z)$:

$$v_2 = -\frac{Pz}{GF_1}$$

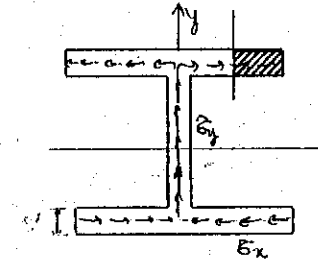
soit pour $z=l$: $f_2 = -\frac{Pl}{GF_1}$

CAS PARTICULIER DES SECTIONS COMPOSEES DE PROFILES MINCE :

Dans une section AB de l'aile $\tau_y(y)$ s'annule sur les 2 faces de l'aile et varie sur une faible épaisseur. On peut donc supposer que $\tau_x(y)$ reste seule alors que $\tau_y = 0$



de la même façon pour l'âme, τ_x est négligée et τ_y reste seule



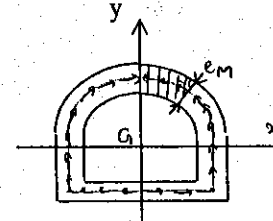
on considère ici S_x^* de la partie hachurée / G_x réparti de façon uniforme sur l'épaisseur donc :

$$\tau = \frac{V S_x^*}{I_x e} \text{ reste valable}$$

pour l'aile

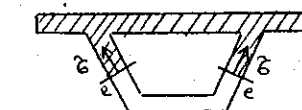
$$\tau_x = \frac{V_y (b-x) e h}{I_x e} = \frac{V_y h}{I_x} (b-x)$$

Cas d'un profilé mince de forme tubulaire admettant G_y comme axe de symétrie.



Pour la partie hachurée entre coupure et G_y

$$\tau_M = \frac{V_y S_x^*}{I_x e_M}$$



Pont en caisson : τ est tangente à la direction des âmes et :

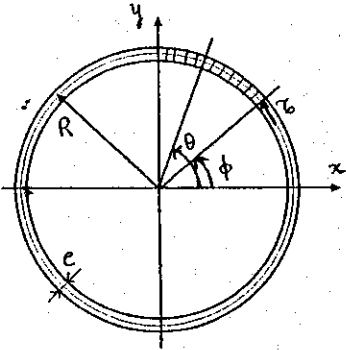
$$\tau = \frac{V S_x^*}{2 e I_x}$$

Pour le calcul de l'énergie (Γ étant le contour moyen du profilé fermé), la section réduite relative à l'énergie est F_1 donnée par l'expression suivante:

$$F_1 = \frac{I_x^2}{\int_{(\Gamma)} \frac{S_x^{*2}}{e} dl}$$

Application: Cas d'une section annulaire circulaire $e \ll R$

$$S = 2\pi R e \text{ et } I_x = \pi R^3 e$$



$$S'_x = \iint y dS = \int_0^{\pi/2} R \sin\theta R d\theta e = eR^2 \cos\phi$$

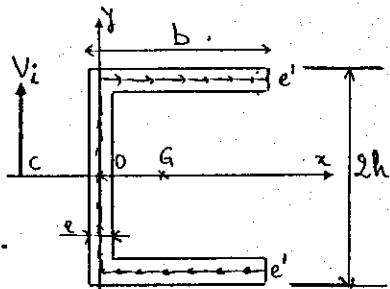
$$\tau = \frac{V_y e R^2 \cos\phi}{\pi R^3 e} = \frac{V_y \cos\phi}{\pi R e} = \frac{2V_y \cos\phi}{S}$$

$$\tau_{\max} = \frac{V_y}{S/2}$$

$$\int_{(r)} \frac{S'_x}{e} dl = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{e^2 R^4 \cos^2\phi}{e} R d\theta = \pi R^5 e$$

$$\text{d'où } F_1 = \frac{I_x^2}{\pi R^5 e} = \frac{\pi^2 R^6 e^2}{\pi R^5 e} = \pi R e = \frac{S}{2}$$

Cas de sections en profilés minces qui n'ont pas G_y comme axe de symétrie (G_x axe de symétrie). Centre de torsion



$$e' \ll h \text{ et } e \ll b$$

$$s' = b e' \text{ et } s = 2 h e$$

$$\tau_{y(\text{tme})} = \frac{V_y S'_x}{I_x e} = \frac{V_y}{I_x e} \left(s' h + \frac{e}{2} (h^2 - y^2) \right)$$

$$\tau_{x(\text{aile})} = \frac{V_y}{I_x} e (b - x) h = \frac{V_y}{I_x} h (b - x)$$

Equilibre de la section : $\sum F_x = 0$ OK.

$$\sum F_y = \int_{\text{aile}} \tau_y e dy = \frac{V_y h^2}{I_x} (6s' + s) = V_y$$

Puisque $I_x = \frac{h^2}{3} (s + 6s')$ après calcul il reste à vérifier $\sum M/O = 0$ pour cela il

faut que la résultante des forces de cisaillement V_i passe par le Centre de Torsion tel que $OC = M/V_i$

$$\text{ici } \sum M/O = 2 \int_0^b \tau_x e' h dx = \frac{e' h^2 b^2}{I_x} V_y \text{, d'où } OC = \frac{e' h^2 b^2}{I_x}$$

* Répartition des contraintes de cisaillement dans une section en I

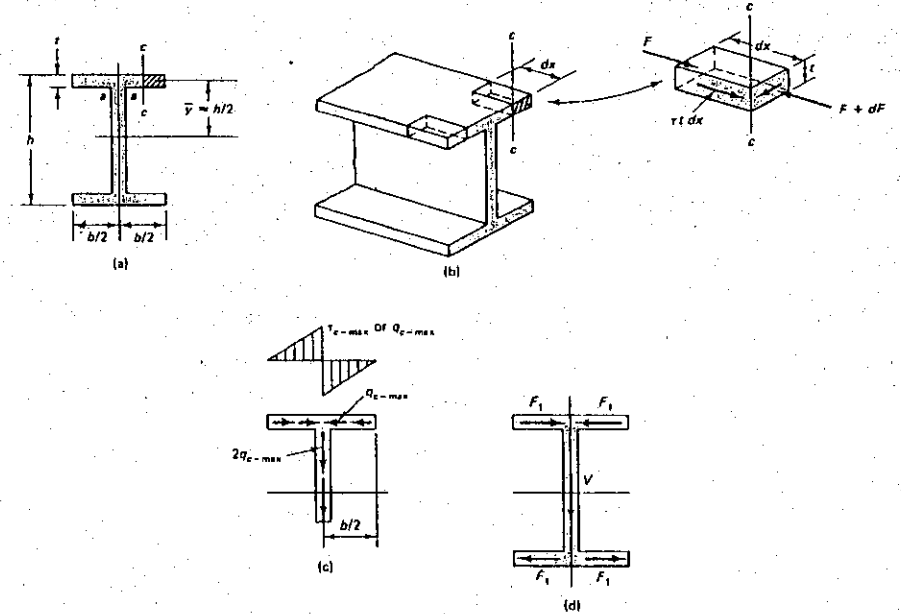


Fig. 7-20 Deriving location of shear center for a channel.

* Centre de cisaillement

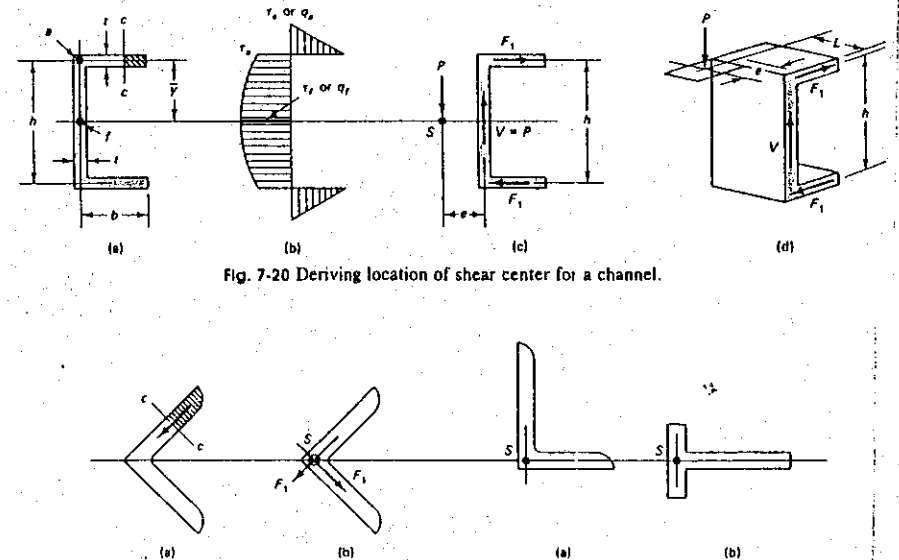
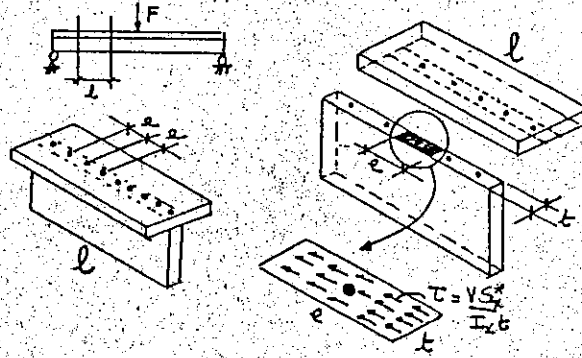


Fig. 7-23 Shear center for an equal leg angle is at S.

Fig. 7-24 Shear center for the sections shown is at S.

2. Cisaillement des boulons

Considérons une poutre en T, composée de 2 planches collées ensemble dans un premier temps, puis clouées dans un deuxième temps.



La force de cisaillement à laquelle la section du clou doit résister est:

$$F_c = \tau \cdot t \cdot e = \frac{VS'_x}{I_x t} \cdot t \cdot e = \frac{VS'_x}{I_x} \cdot e = q \cdot e$$

où $q = VS'_x / I_x$ est le flux de cisaillement.

Connaissant la résistance au cisaillement d'une section de clou soit:

$F_{résistant} = \tau_0 \pi D^2 / 4$, τ_0 étant la limite élastique en cisaillement du matériau dont est fait le boulon,

on doit avoir:

$$F_{résistant} \geq F_c = q \cdot e$$

Donc l'espacement des clous est: $e \leq \frac{F_r}{q}$

S'il y a deux rangées de clous, $e \leq \frac{2F_r}{q}$

de même si le clou est en double cisaillement.

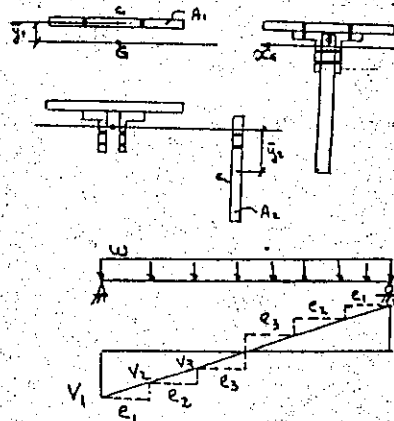
Examinons une section en T formée de 2 plaques d'acier et de 2 cornières. On a:

$$e_1 \leq \frac{2F_r}{q_1} \text{ avec } q_1 = \frac{VS'_{x1}}{I_x}, \quad S'_{x1} = A_1 \bar{y}_1$$

$$e_2 \leq \frac{4F_r}{q_2} \text{ avec } q_2 = \frac{VS'_{x2}}{I_x}, \quad S'_{x2} = A_2 \bar{y}_2$$

Lorsque la poutre est chargée avec une charge distribuée, on remplace la fonction linéaire de V par une fonction en escalier, on a:

$$e_1 = \frac{F_c}{q_1}, \quad e_2 = \frac{F_c}{q_2}, \quad e_3 = \frac{F_c}{q_3}$$



Annexe

L'EFFET RESAL

Dans la section droite (Ω) d'un pont de hauteur variable, les sollicitations sont N , M et T , et la section droite a une forme en caisson (figure 1). La fibre moyenne (Γ) présente les angles α_1 et α_2 avec les fibres moyennes (Γ_1) et (Γ_2) des membrures supérieure et inférieure. Les sections des membrures supérieure et inférieure sont B_1 et B_2 .

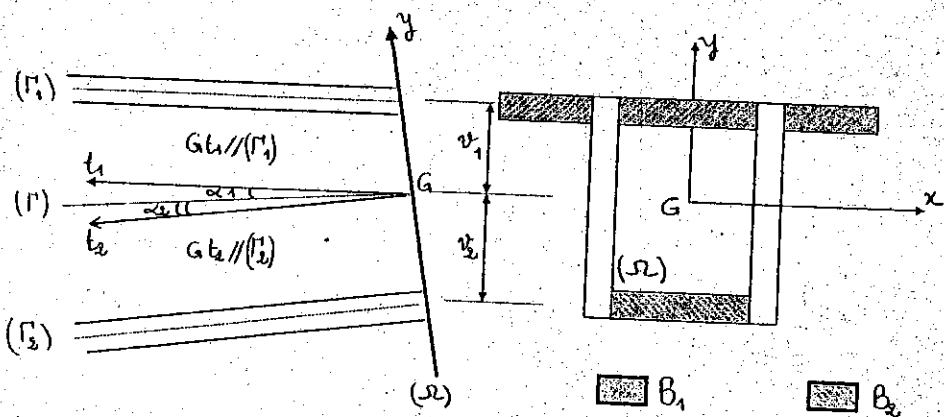


Figure 1

Dans les deux membrures, les contraintes normales sont σ_1 et σ_2 :

$$\sigma_1 = \frac{N}{\Omega} + \frac{Mv_1}{I} \quad \sigma_2 = \frac{N}{\Omega} - \frac{Mv_2}{I}$$

Nous pouvons supposer que ces contraintes sont constantes dans les membrures car leurs épaisseurs sont petites devant v_1 et v_2 .

Mais, les contraintes normales étant nécessairement canalisées par les membrures, on peut admettre que σ_1 et σ_2 sont en fait les projections sur la fibre moyenne (Γ) des vecteurs contraintes \vec{f}_1 et \vec{f}_2 , dirigés selon (Γ_1) et (Γ_2) (figure 2a).

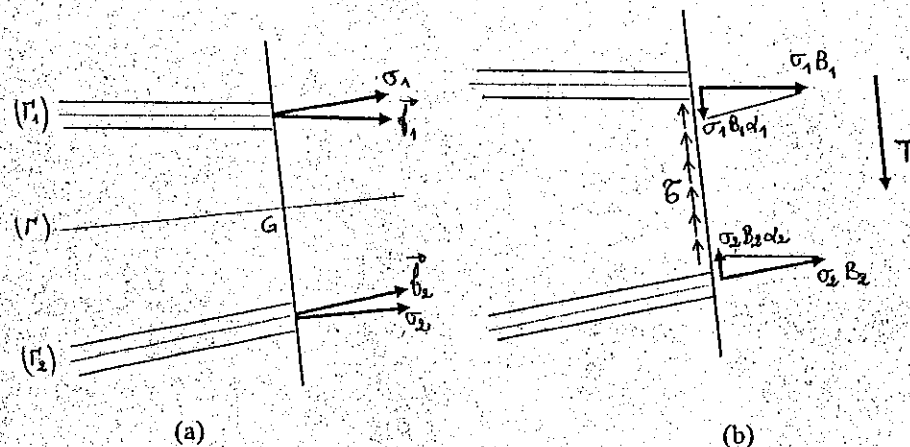


Figure 2

Les forces internes développées par les membrures sont donc deux forces $\sigma_1 B_1$ et $\sigma_2 B_2$ (en supposant α_1 et α_2 petits) dirigées selon (Γ_1) et (Γ_2) (figure 2b). Les composantes $\sigma_1 B_1 \alpha_1$ et $\sigma_2 B_2 \alpha_2$ de ces forces selon Gy équilibrent donc une partie de l'effort tranchant. On peut donc écrire:

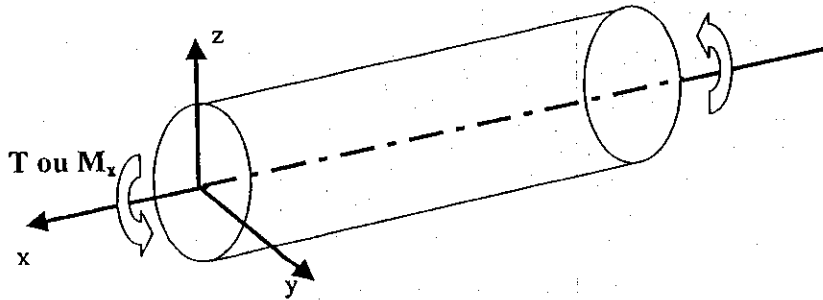
$$T = \sigma_2 B_2 \alpha_2 - \sigma_1 B_1 \alpha_1 + \iint_{\Omega} \tau d\Omega$$

$$\text{ou } T_R = T - \sigma_2 B_2 \alpha_2 + \sigma_1 B_1 \alpha_1 = \iint_{\Omega} \tau d\Omega$$

En général, on a $\sigma_2 B_2 \alpha_2 > \sigma_1 B_1 \alpha_1$ si bien que les contraintes tangentes τ équilibrent une partie de l'effort tranchant T_R ou effort tranchant réduit par l'effet Résal.

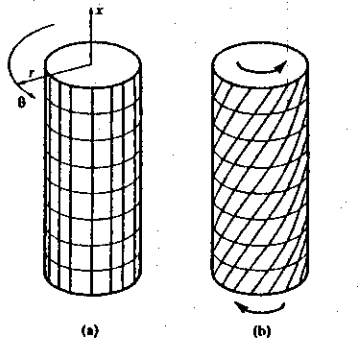
LA TORSION

Une section (F) est soumise à la torsion pure si tous les facteurs de forces sont nuls sauf le moment de torsion qui sera noté M_t , T, C ou M_x si ox est l'axe de la torsion



La section circulaire est la plus efficace en torsion. Dans ce chapitre, on traitera la section circulaire en premier, puis on étudiera les tubes à paroi mince et les sections ouvertes minces.

1. Sections circulaires



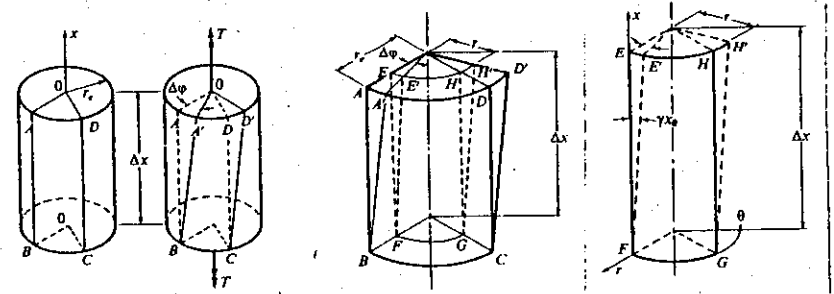
Grâce à la symétrie de la section circulaire autour de l'axe longitudinal, la solution analytique est relativement simple, on la déduit à partir de l'équilibre et la comptabilité des déformations.

Hypothèses de la théorie simplifiée:

Lorsque une membrure de section circulaire est soumise à un moment de torsion, on suppose que:

- 1) Ses dimensions ne changent pas de façon notable
- 2) Les diamètres demeurent droits après déformation
- 3) Les sections restent planes.

La seule déformation consiste donc en une rotation des sections parallèlement les unes aux autres.



Considérons une partie déformée de la membrure de longueur Δx . Et isolons en outre l'élément situé à r de l'axe x , cet élément a subi une déformation de cisaillement $\gamma_{x\theta}$ telle que:

$$\gamma_{x\theta} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{EE'}{EF} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{r d\varphi}{dx}$$

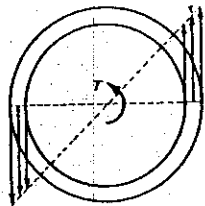
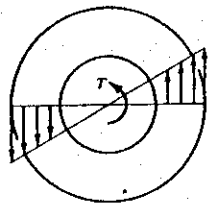
$$\gamma_{x\theta} = r \frac{d\varphi}{dx} \quad (1)$$

La contrainte de cisaillement correspondante est $\tau_{x\theta} = G \gamma_{x\theta}$

$$\tau_{x\theta} = Gr \frac{d\varphi}{dx} \quad (2)$$

Remarques:

- A cause de la symétrie par rapport à l'axe des x, nous constatons que les équations (1) et (2) ci-dessus sont valables pour toutes les sections circulaires pleines ou évidées.
- La déformation (distorsion) $\gamma_{x\theta}$ et la contrainte de cisaillement $\tau_{x\theta}$ sont directement proportionnelles au rayon.
- $\gamma_{x\theta}$ et $\tau_{x\theta}$ varient linéairement de zéro au centre de la section à une valeur maximale au périmètre extérieur.
- $\frac{d\phi}{dx}$ s'appelle l'angle de torsion unitaire et il est constant



*** Conditions d'équilibre:**

Pour le tronçon isolé en équilibre:

$$\Sigma F_H = \Sigma F_V = 0$$

$$M(r) = 0 = \tau_{x\theta}(r \Delta\theta \Delta r) \Delta x - \tau_{\theta x}(\Delta x \Delta r) r \Delta\theta$$

$$\text{d'où } \tau_{x\theta} = \tau_{\theta x}$$

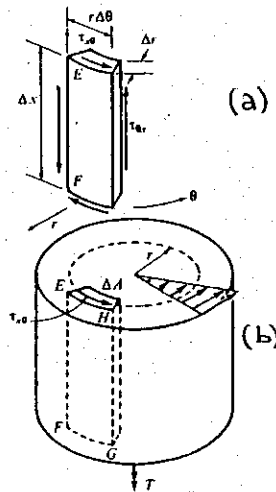
$$T = \iint_A dM_x = \iint_A r(\tau_{x\theta} dA)$$

$$T = \iint_A r Gr \frac{d\phi}{dx} dA$$

$$= G \frac{d\phi}{dx} \iint_A r^2 dA = G \frac{d\phi}{dx} I_0$$

$$I_0 = J = \text{moment d'inertie polaire}$$

$$T = G \frac{d\phi}{dx} J \quad (3)$$



a) Contraintes de cisaillement agissant sur un petit élément; b) répartition de la contrainte de cisaillement sur la section.

Si la section est creuse de rayon interne r_i et de rayon externe r_e alors:

$$J = \int_A r^2 dA = \int_{r_i}^{r_e} r^2 (2\pi r dr) = \frac{\pi}{2} (r_e^4 - r_i^4) = \frac{\pi}{32} (d_e^4 - d_i^4)$$

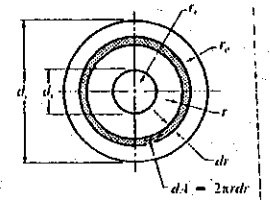
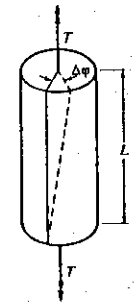
$$\text{l'équation (3)} \Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{GJ} \quad (4)$$

$$\text{d'où } \tau_{x\theta} = \tau = Gr \frac{T}{GJ} = \frac{Tr}{J}$$

$$\tau_{x\theta} = \tau = \frac{Tr}{J} \quad (5)$$

$$\left(\text{en flexion on a } \sigma = \frac{My}{I} \right)$$

$$\Delta\phi = \int_0^L d\phi = \int_0^L \frac{T}{GJ} dx = \frac{TL}{GJ}$$



Remarques:

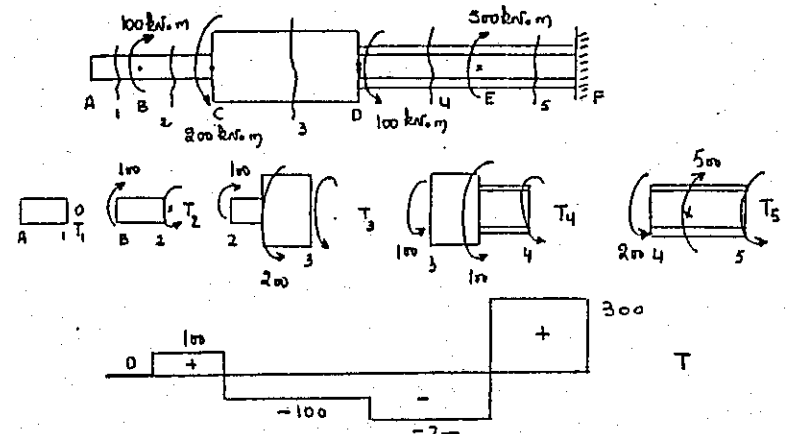
- Un élément situé près de l'axe central est soumis à une contrainte relativement faible. Il est par conséquent évident que le matériau situé près du centre d'un arbre plein serait plus efficace s'il servait à augmenter le rayon extérieur \Rightarrow arbre creux est plus résistant et plus efficace pour la torsion.

Diagramme des moments de torsion:

Le digramme des moments de torsion est obtenu en appliquant la méthode des sections et en faisant l'équilibre de chaque élément et en suivant la convention choisie pour le sens du moment positif.

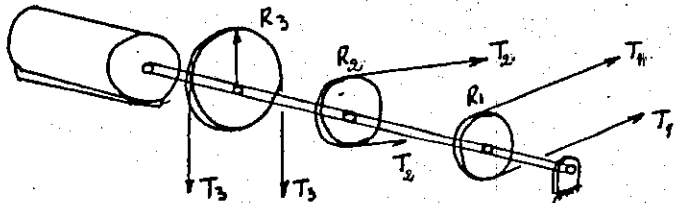
Exemple: Pour la figure montrée:

- AB : $\Sigma M_x = T_1 = 0$ donc $T_1 = 0$
- BC : $\Sigma M_x = -100 + T_2 = 0$ donc $T_2 = 100 \text{ kN.m}$
- CD : $\Sigma M_x = -100 + 200 + T_3 = 0$ donc $T_3 = -100 \text{ kN.m}$
- DE : $\Sigma M_x = 100 + 100 + T_4 = 0$ donc $T_4 = -200 \text{ kN.m}$
- EF : $\Sigma M_x = 200 - 500 + T_5 = 0$ donc $T_5 = 300 \text{ kN.m}$



Cas des axes de moteurs:

Les arbres circulaires sont souvent des axes de moteurs ou de machines tournantes. Au niveau du moteur, l'axe sera considéré comme encastré et soumis à un couple de torsion T dû au moteur. Au niveau des poulies ou des engrenages, il existe des couples de torsion résistants dus aux systèmes mécaniques.



Il s'agit dans ce cas de déterminer le rayon de l'arbre de torsion, connaissant les tensions dans les courroies ou les efforts au niveau des poulies et la puissances du moteur.

La relation qui existe entre la puissance du moteur P , exprimée en Watts (Joules/s ou $N \cdot m/s$), la vitesse N , exprimée en radians par secondes (1 tour/minute = $2\pi/60$ rad/seconde) et le couple de torsion T développé par le moteur, exprimé en $N \cdot m$ est:

$$T = P/N \quad (N.m) = \left(\frac{N.m}{s} \right) / (rad/s)$$

Si P est en chevaux-vapeur (1 HP = 745 watts) et N en tours par minute on a:

$$T = 7115 \quad (N.m) = \frac{745}{2\pi/60} \frac{(HP)}{(\text{tours/minute})}$$

Si P est en kilowatts et N en tours par minute:

$$T = 9550 \quad (N.m) = \frac{1000}{2\pi/60} \frac{(kW)}{(\text{tours/minute})}$$

2) Tubes à paroi mince

Dans les tubes à paroi mince, l'épaisseur est faible par rapport aux autres dimensions, donc une section peut être assimilée à sa fibre moyenne.

On admet que $\tau = \tau_{xs}$ est tangente au contour de la section (représenté par l'abscisse s) et répartie d'une façon uniforme suivant l'épaisseur t .

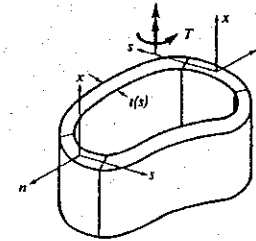


fig 2.1

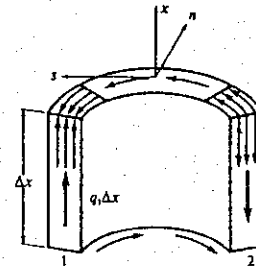


fig 2.2

$$q = q_{xs} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xs} \, dn \approx \tau_{xs} t$$

* Conditions d'équilibre:

Dans la figure 2.2:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow q_1 \Delta x = q_2 \Delta x$$

$$\Rightarrow q_1 = q_2 \text{ donc le flux de cisaillement } q = q_1 = q_2 \text{ est constant}$$

autour de la section même si la paroi change d'épaisseur.

$$q = \tau t \Rightarrow \tau = \frac{q}{t} \quad (6)$$

$$q = \int_{\text{épaisseur}} \tau \, dn = \text{flux de cisaillement}$$

Equilibre des moments: $\sum M/x = 0$

$$T = \int h(s) q \, ds$$

(qds = force, $h(s)$ = bras de levier)

$$T = q \int h(s) \, ds$$

$$h(s) \, ds = 2 \times \text{aire du triangle hachuré}$$

(fig 2.3a)

$$\int h(s) \, ds = 2\bar{A}$$

\bar{A} = aire comprise à l'intérieur du périmètre moyen (fig 2.3b)

$$T = 2q\bar{A} \Rightarrow q = \frac{T}{2\bar{A}} \quad (7)$$

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{T}{2\bar{A}t} \quad (8)$$

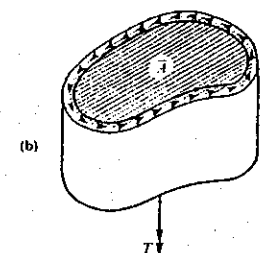
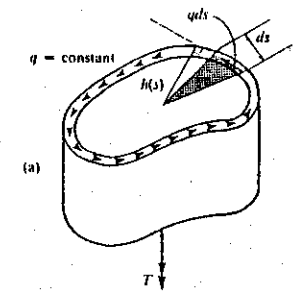
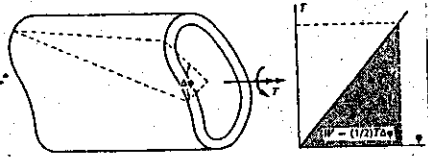


fig 2.3

Déformation angulaire des tubes à paroi mince:

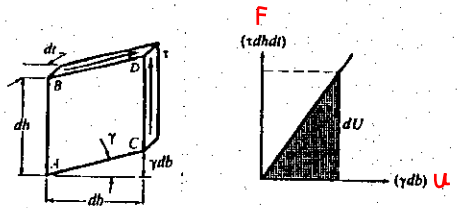
Energie de déformation due à T



Le travail fourni par le moment de torsion T pour obtenir un angle (distorsion) $\Delta\phi$ est donné par

$$W = \frac{1}{2} T \Delta\phi$$

L'énergie de déformation absorbée par un élément soumis à une contrainte de cisaillement τ est égale à:



$$dU = \frac{1}{2} \tau \gamma dV \Rightarrow U = \frac{1}{2G} \int_V \tau^2 dV$$

$$W = U \Rightarrow \frac{1}{2} T \Delta\phi = \frac{1}{2G} \int_V \tau^2 dV$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{TG} \int_V \tau^2 dV \quad (9)$$

$$\tau = \frac{T}{2At} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{T}{4A^2 G} \int_V \frac{dV}{t^2}$$

$$dV = L dS = L t(s) ds$$

L = longueur du tube

$$\Delta\phi = \frac{TL}{4A^2 G} \oint \frac{ds}{t(s)}$$

(intégration sur le contour) (10)

$$\text{Si on pose } J = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (11)$$

Nous obtenons une expression similaire à celle des sections circulaires.

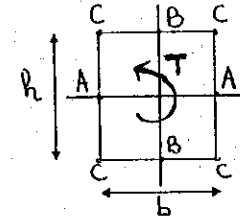
$$\Delta\phi = \frac{TL}{GJ} \quad (12)$$

J est appelée constante de torsion qui dépend uniquement de la géométrie du tube.

3- Sections rectangulaires et sections quelconques:

Pour les sections autres que circulaires, la théorie simplifiée de la torsion n'est plus valable. Il faut utiliser la théorie de l'élasticité pour trouver une solution analytique exacte, (MMC). La théorie de Saint-Venant qui est basée sur la résolution des équations d'équilibre dans le cas de la torsion conduit à une solution rigoureuse basée sur la détermination de quelques coefficients multiplicateurs qu'on donnera dans un tableau ci-dessous.

3.1- Sections rectangulaires (bxh)



L'angle de torsion par unité de longueur est donné par:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{K} \quad (13)$$

$$\Delta\phi = \frac{TL}{K}$$

avec K = coefficient de proportionnalité qui s'appelle rigidité torsionnelle (section circulaire : $K = G J_0$)

K est donnée par: $K = G C_1 h b^3$ (14)

la constante C_1 est donnée dans le tableau ci-dessous.

La contrainte τ_{\max} (au niveau du point A) est donnée par:

$$\tau_{\max A} = \frac{T}{\alpha h b^2} \quad (15)$$

A est le milieu du grand côté (cours MMC $\tau_{\max}(A)$)

En B le milieu du petit côté du rectangle

$$\tau_{\max B} = \frac{T}{\beta h b^2} \quad (16)$$

Les coefficients α et β dépendent du rapport h/b et sont donnés dans le tableau suivant:

Le coefficient C_1 et la coefficient $C_2 = C_1/\alpha$ sont aussi données dans ce tableau.

n = h/b	1	1,5	2	3	4	∞
$\alpha = C_1/C_2$	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,333
C_1	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,333
C_2	0,675	0,852	0,928	0,977	0,990	1,000
β	0,208	0,270	0,309	0,354	0,379	0,448

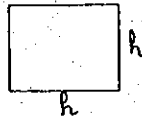
Pour $n > 4$ C_1 et C_2 sont données par les formules approximatives suivantes:

$$C_1 = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{0,630}{n} \right) \quad n \rightarrow \infty \quad C_1 \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$C_2 = 1 - \frac{0,65}{1+n^3} \quad n \rightarrow \infty \quad C_2 \rightarrow 1$$

Cas particuliers:

* Section carré : $\tau_{max} = \frac{T}{0,208h^3}$
 $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{0,141Gh^4}$

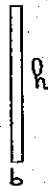


* Section rectangulaire très aplatie: ($\frac{h}{b}$ très grand)

$$\alpha = C_1 = \frac{1}{3}$$

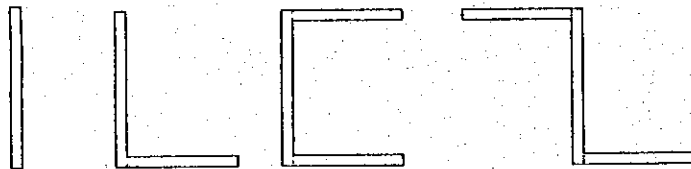
$$\tau_{max} = \frac{3T}{hb^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{3T}{Ghb^3}$$



3-2 Sections ouvertes à paroi mince

La théorie de l'élasticité et l'expérience montrent que les contraintes et l'angle de torsion dans une barre de section rectangulaire très aplatie ne changent guère si on replie la section pour former des profilés minces (sans changer le moment torsion T).

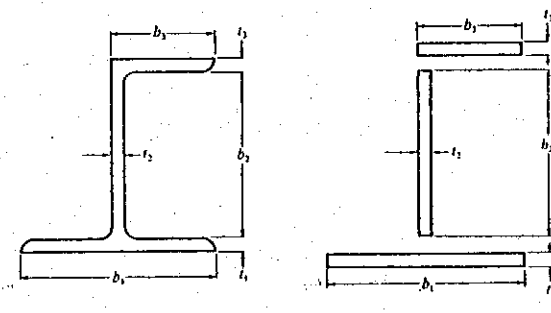


Pour toutes ces sections les formules de la section rectangulaire aplatie restent valables:

$$\tau_{max} = \frac{T}{\frac{1}{3}hb^3} \text{ et } \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{\frac{1}{3}Ghb^3}$$

avec h = longueur moyenne développée de la section
 b = épaisseur

* D'une manière générale, nous pouvons décomposer un profilé mince en un certain nombre de section rectangulaire mince.



On peut admettre, (sans grande erreur), que les différents rectangles de dimensions (t_i, b_i) qui composent la section résistent à la torsion indépendamment l'un de l'autre ; on peut donc écrire:

$$K = \frac{1}{3} G \sum_i b_i t_i^3 \quad \text{tel que } \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{K}$$

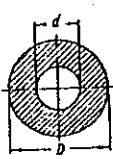
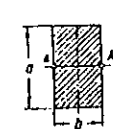

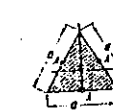
$$(\tau_i)_{max} = G \frac{T t_i}{K} = \frac{T t_i}{\frac{1}{3} \sum_i b_i t_i^3}$$

$$\Delta\varphi = \frac{T L}{K}$$

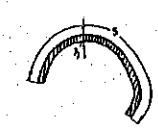
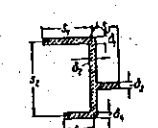
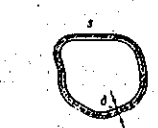
(formules approchées, si $b/t > 10 \Rightarrow$ très bons résultats)

* TORSION *

Tableau 3

Section	W_T	J_T
Circulaire 	$0,2D^3 \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$	$\frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$
Rectangulaire 	$\frac{2}{3}ab^2$	$C_1 b^3 a$
Elliptique 	$\frac{\pi ab^3}{2}$	$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$
En forme de triangle équilatéral 	$\frac{a^3}{20}$	$\frac{\sqrt{3}}{80} a^4$

Suite du tableau 3

Section	W_T	J_T
Profil ouvert 	$\frac{1}{3} \delta s^3$	$\frac{1}{3} \delta s^3$
Profil composé 	$\frac{J_T}{\delta_{max}}$	$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \delta s_i^3$
Profil fermé 	$2F \delta_{min}$	$\frac{4F s^3}{\delta}$

On a donné dans le tableau 3 pour des barres de différentes sections les facteurs géométriques W_T et J_T intervenant dans les formules des contraintes et des angles de rotation :

$$\tau_{max} = \frac{M_{tors}}{W_T} \quad \varphi = \frac{3Ml}{GJ_T}$$

$n = \frac{a}{b}$	1	1,2	1,5	2	3	4	5	10	∞
C_2	0,675	0,759	0,848	0,930	0,968	0,985	0,997	1,000	1
C_1	0,1406	0,166	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	$\frac{1}{3}$
$\alpha = \frac{C_1}{C_2}$	0,208	0,219	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	$\frac{1}{3}$

$C_1 = \frac{1}{3} - \frac{0,21}{n}$ (si $n > 4$) valeurs approchées

CALCUL DES DEPLACEMENTS

INTRODUCTION :

Les structures sont conçues pour résister aux contraintes mécaniques sous l'action des sollicitations aux quelles elles sont soumises. Toutefois, le concepteur doit toujours vérifier que ces structures ne présentent pas des déflexions exagérées qui nuisent au fonctionnement ou à l'exploitation des structures elles-mêmes ou à leurs équipements (revêtements, pont roulant, châssis,...).

Par exemple :

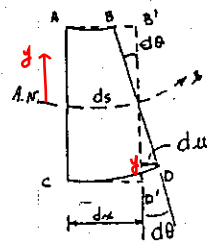
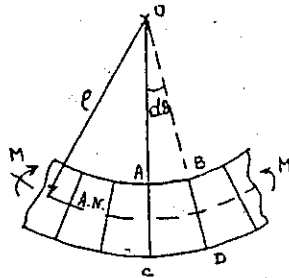
- en charpente métallique : flèche/portée $< 1/500$ pour une poutre principale
flèche/portée $< 1/200$ pour une poutre secondaire
- pour une poutre en BA : $\Delta f / \text{portée} < 1/500$ pour éviter de fissurer les cloisons et le revêtement de sol

DEFORMÉE DES POUTRES

Équation de la courbe élastique

Dans cette section, on étudiera la déformée des poutres droites soumises à un moment fléchissant; l'effet de l'effort tranchant sur la déformée étant très faible, il sera négligé.

Lors de la flexion, une poutre effectue une rotation autour d'un centre de rotation O, et les sections droites restent droites après déformation.



$$d\theta = \frac{du}{y}$$

Chapitre 7

On a: $du = -y d\theta$ et $\epsilon_x = \frac{du}{dx} = -y \frac{d\theta}{dx}$

ϵ_x étant positif lorsque y est négatif.

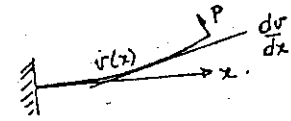
Avec: $ds = \rho d\theta = dx$, il vient: $\epsilon = -y/\rho$ et $\sigma = -y E/\rho$

Et avec $\sigma = -\frac{M \cdot y}{I}$, il vient: $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

La déformée de la poutre est fonction de la rigidité de la poutre EI et du moment fléchissant.

En mathématiques, on démontre que:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 v / dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$



Dans le domaine élastique, les déformations étant petites, on considérera $(dv/dx)^2 = 0$ donc $1/\rho = d^2 v / dx^2$

et $\frac{d^2 v}{dx^2} = v''(x) = \frac{M(x)}{EI}$

Cette relation est l'équation différentielle de la déformée d'une poutre en flexion. En tout point de la poutre on a:

- $v(x)$: déflexion de la poutre en tout point
- $v'(x)$: pente de la déformée en tout point

En considérant les relations entre p, V et M, il vient:

$$M(x) = EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = EI v''(x)$$

$$V(x) = -\frac{dM}{dx} = -EI \frac{d^3 v(x)}{dx^3} = -EI v'''(x)$$

$$p(x) = -\frac{dV}{dx} = EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = EI v^{(4)}(x)$$

Chapitre 7

Connaissant la déformée $v(x)$ d'une poutre, il est possible de trouver $M(x)$, $V(x)$ et $p(x)$. Inversement en intégrant 4 fois la charge ou 2 fois le moment fléchissant, il vient:

$$EI v''''(x) = p(x)$$

$$EI v'''(x) = \int p dx + A = -V(x)$$

$$EI v''(x) = \iint (p dx + A) dx + B = M(x)$$

$$EI v'(x) = \int M(x) dx + C_1$$

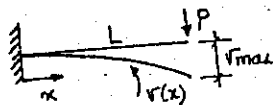
$$EI v(x) = \iiint (M(x) dx + C_1) dx + C_2$$

La double intégration se calcule par troncçons de poutre sur lesquels E et I sont constants et où l'équation de $M(x)$ est unique.

Conditions aux frontières

Les conditions aux frontières permettent de calculer les constantes C_1 et C_2 des expressions de $v'(x)$ et de $v(x)$.

a- Appui encastré

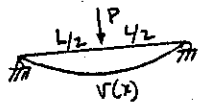


$$v(0) = 0$$

$$v'(0) = 0$$

$$v(L) = v_{max}$$

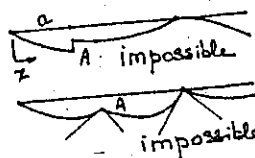
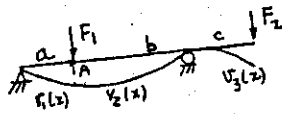
b- Appui simple (rotule ou rouleau)



$$v(0) = 0$$

$$v(L) = 0$$

c- Continuité d'une poutre



- même déflexion à gauche et à droite d'une coupe
- même tangente à gauche et à droite d'une coupe.

$$v_A = v_A, \text{ soit } v_1(a) = v_2(a)$$

$$v'_A = v'_A, \text{ soit } v'_1(a) = v'_2(a)$$

Chapitre 7

Exemples

1- Poutre en porte-à-faux avec charges concentrées

$$M(x) = -Px$$

$$EI v''(x) = -Px$$

$$EI v'(x) = -\frac{Px^2}{2} + C_1$$

$$EI v(x) = -\frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2$$

$$v'(L) = 0 \text{ soit: } -\frac{PL^2}{2} + C_1 = 0 \text{ donc } C_1 = \frac{PL^2}{2}$$

$$v(L) = 0 \text{ soit: } -\frac{PL^3}{6} + C_1L + C_2 = 0 \text{ donc } C_2 = -\frac{PL^3}{3}$$

Les équations de la pente et de la déformée sont:

$$v'(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{Px^2}{2} + \frac{PL^2}{2} \right)$$

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{Px^3}{6} + \frac{PLx^2}{2} - \frac{PL^3}{3} \right)$$

Pour $x=0$, on a $v'_{max} = \frac{PL^2}{2EI}$ et $v_{max} = -\frac{PL^3}{3EI}$

Comme les déformées sont toujours dans le domaine élastique, elles peuvent se superposer, comme le montre l'exemple suivant:

$$v = v_1 + v_2 = v_1^I + v_2^{II}$$

$$v_1 = -\frac{P(2L)^3}{3EI} = -\frac{8PL^3}{3EI}$$

$$v_2^I = -\frac{PL^3}{3EI}$$

$$v_2^{II} = -\frac{PL^2}{2EI} \cdot L = -\frac{PL^3}{2EI}$$

$$v = -\frac{8PL^3}{3EI} - \frac{PL^3}{3EI} - \frac{PL^3}{2EI} = -\frac{7PL^3}{2EI}$$

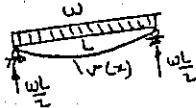
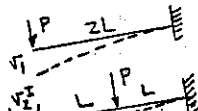
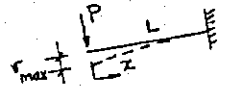
avec

Soit:

2- Poutre avec charge répartie sur deux appuis simples

$$EI v''(x) = M(x) = -\frac{\omega x^2}{2} + \frac{\omega L}{2} x$$

$$EI v'(x) = -\frac{\omega x^3}{6} + \frac{\omega L}{2} \frac{x^2}{2} + C_1$$



$$EIv''(x) = -\frac{\omega x^4}{24} + \frac{\omega L}{12}x^3 + C_1x + C_2$$

$$v(0) = 0 \text{ donc } C_2 = 0$$

$$v(L) = 0 \text{ donc } -\frac{\omega L^4}{24} + \frac{\omega L}{12}L^3 + C_1L = 0 \text{ et } C_1 = -\frac{\omega L^3}{24}$$

Les équations de la pente et de la déformée sont:

$$v'(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{\omega x^3}{6} + \frac{\omega L}{4}x^2 - \frac{\omega L^3}{24} \right)$$

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{\omega x^4}{24} + \frac{\omega L}{12}x^3 - \frac{\omega L^3}{24}x \right)$$

$v(x)$ est maximum quand $v'(x) = 0$, soit quand $x = \frac{L}{2}$:

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = v_{\max} = -\frac{5\omega L^4}{384EI}$$

3- Poutre en porte-à-faux avec charge répartie

$$EIv''(x) = M(x) = -\frac{\omega x^2}{2}$$

$$EIv'(x) = -\frac{\omega x^3}{6} + C_1$$

$$EIv(x) = -\frac{\omega x^4}{24} + C_1x + C_2$$

$$v'(L) = 0 \text{ donc } -\frac{\omega L^3}{6} + C_1 = 0 \text{ et } C_1 = \frac{\omega L^3}{6}$$

$$v(L) = 0 \text{ donc } -\frac{\omega L^4}{24} + \frac{\omega L^3}{6} \cdot L + C_2 = 0 \text{ et } C_2 = -\frac{\omega L^4}{8}$$

Donc les équations de la pente et de la déformée sont:

$$v'(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{\omega x^3}{6} + \frac{\omega L^3}{6} \right)$$

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{\omega x^4}{24} + \frac{\omega L^3}{6}x - \frac{\omega L^4}{8} \right)$$

$$\text{à } x=0, v'_{\max} = \frac{\omega L^3}{6EI} \text{ et } v_{\max} = -\frac{\omega L^4}{8EI}$$

4- Cas général

Sur AB $0 \leq x \leq 4$

$$EIv''_1(x) = 20x$$

$$EIv'_1(x) = 10x^2 + C_1$$

$$EIv_1(x) = 3,3x^3 + C_1x + C_2$$

Sur BC $0 \leq x \leq 4$

$$EIv''_2(x) = -5x^2 + 80$$

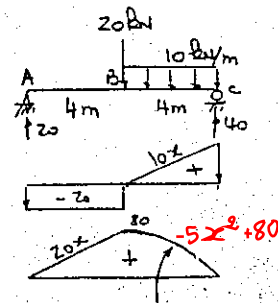
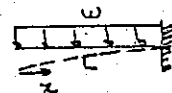
$$EIv'_2(x) = -1,6x^3 + 80x + C_3$$

$$EIv_2(x) = -0,4x^4 + 40x^2 + C_3x + C_4$$

$$v_1(0) = C_2 = 0 \text{ donc } C_2 = 0$$

$$v'_1(4) = v'_2(0) \text{ soit } 160 + C_1 = C_3$$

$$v_1(4) = v_2(0) \text{ soit } 213 + 4C_1 = C_4$$



$$v_2(4) = 0 \Rightarrow 107 + 640 + 4C_3 + C_4 = 0$$

La dernière équation devient: $747 + (160 \times 4) + 4C_1 + 213 + 4C_1 = 0$

soit $C_1 = -200, C_3 = -40, C_4 = -587$

Les équations de la pente et de la déformée sont telles que:

$$v'_1(x) = \frac{1}{EI} (10x^2 - 200) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (0 \leq x \leq 4)$$

$$v_1(x) = \frac{1}{EI} (3,33x^3 - 200x)$$

$$v'_2(x) = \frac{1}{EI} (-1,66x^3 + 80x - 40)$$

$$v_2(x) = \frac{1}{EI} (-0,41x^4 + 40x^2 - 40x - 587) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (0 \leq x \leq 4)$$

À mi-portée:

$$v'_1(4) = v'_2(0) = -40/EI \text{ et } v_1(4) = v_2(0) = -587/EI$$

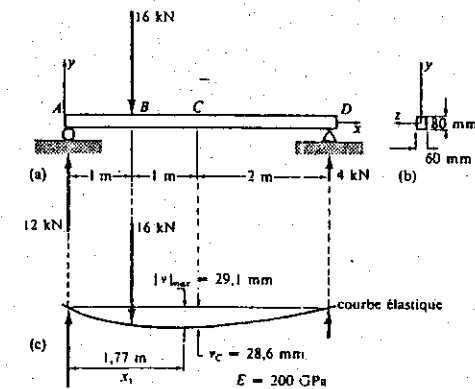
Si $E = 200\,000 \text{ MPa} = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ et $I = 10^8 \text{ mm}^4 = 10^{-4} \text{ m}^4$, on a:

$$v'_1(4) = 0,002 \text{ rad} = 0,11^\circ$$

$$v_1(4) = 29,3 \text{ mm (vers le bas)}$$

EXEMPLE

La poutre ABCD, reposant sur des appuis simples en A et en D, est soumise en B à une force concentrée de 16 kN (fig. 5.4). La section transversale de la poutre est de 60 mm × 80 mm, et le module d'élasticité du matériau est de 200 GPa; on demande de calculer la flèche de la poutre au point C.



Relations entre déplacements et déformations

Par définition, λ, μ et ω (ou $\lambda(x), \mu(x), \omega(x)$) sont les déformations de la poutre au point G. La figure ci-dessous montre les déplacements du point G d'abscisse x occasionnés par les déplacements relatifs des sections d'abscisses ξ et $\xi + d\xi$.

Dans l'hypothèse des petits déplacements (HPP), ces déplacements sont :

Selon G_0x : $\mu d\xi$

Selon G_0y : $\lambda d\xi + (x - \xi)\omega d\xi$

En rotation : $\omega d\xi$

u_0, v_0 et θ_0 étant les déplacements du point G_0 , il en résulte que les déplacements totaux du point G sont :

Selon G_0x : $u(x) = u_0 + \int_0^x \mu(\xi) d\xi$

Selon G_0y : $v(x) = v_0 + \theta_0 x + \int_0^x (x - \xi)\omega(\xi) d\xi + \int_0^x \lambda(\xi) d\xi$

En rotation : $\theta(x) = \theta_0 + \int_0^x \omega(\xi) d\xi$

En dérivant les trois expressions précédentes, on obtient :

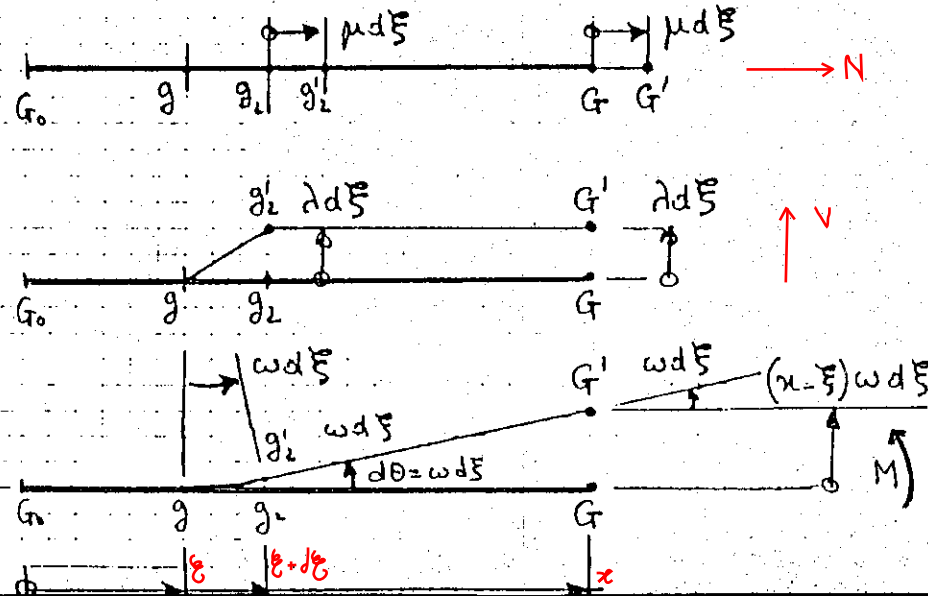
$$\frac{du}{dx} = \mu(x)$$

$$\frac{dv}{dx} = \theta_0 + \int_0^x \omega(\xi) d\xi + \lambda(x) = \theta(x) + \lambda(x)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \omega(x)$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \mu(x) = \frac{du}{dx} \\ \lambda(x) = \frac{dv}{dx} - \theta(x) \\ \omega(x) = \frac{d\theta}{dx} \end{cases}$$



FORMULES DE BRESSE

1- Établissement des formules : Pour une poutre à plan moyen, les relations entre les déplacements u, v et θ , et les déformations λ, μ, ω sont :

$$\begin{cases} u(x) = u_0 + \int_0^x \mu(\xi) d\xi \\ v(x) = v_0 + \theta_0 x + \int_0^x \omega(\xi)(x - \xi) d\xi + \int_0^x \lambda(\xi) d\xi \\ \theta(x) = \theta_0 + \int_0^x \omega(\xi) d\xi \end{cases}$$

Par ailleurs, nous avons établi que si les matériaux suivent la loi de Hooke, les déformations sont fonctions des sollicitations par les formules :

$$\mu = \frac{N}{ES} \quad \lambda = \frac{T}{GS_1} \quad \omega = \frac{M}{EI}$$

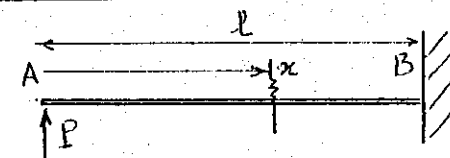
D'où en portant dans les expressions précédentes on obtient les formules de Bresse :

$$\begin{cases} u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{N}{ES} d\xi \\ v(x) = v_0 + \theta_0 x + \int_0^x (x - \xi) \frac{M}{EI} d\xi + \int_0^x \frac{T}{GS_1} d\xi \\ \theta(x) = \theta_0 + \int_0^x \frac{M}{EI} d\xi \end{cases}$$

Ou encore, en négligeant les déplacements dus aux efforts normaux et aux efforts tranchants :

$$\begin{cases} v(x) = v_0 + \theta_0 x + \int_0^x (x - \xi) \frac{M}{EI} d\xi \\ \theta(x) = \theta_0 + \int_0^x \frac{M}{EI} d\xi \end{cases}$$

2- Exemple d'application :



$$\theta(x) = \theta_A + \frac{1}{EI} \int_0^x P \zeta d\zeta = \theta_A + \frac{Px^2}{2EI}$$

à l'encastrement $\theta_B = 0 = \theta_A + \frac{Pl^2}{2EI} \rightarrow \theta_A = -\frac{Pl^2}{2EI}$

donc $\theta(x) = -\frac{P}{2EI}(l^2 - x^2)$

$$v(x) = v_A + \theta_A x + \frac{1}{EI} \int_0^x P \zeta (x - \zeta) d\zeta$$

$$= v_A - \frac{Pl^2}{2EI} x + \frac{Px^3}{6EI}$$

$$v_l = v_B = 0 = v_A - \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{Pl^3}{6EI} \rightarrow v_A = \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$v(x) = \frac{Pl^3}{3EI} - \frac{Pl^2}{2EI} x + \frac{Px^3}{6EI}$$

THEOREME DES TRAVAUX VIRTUELS

Définitions :

État sollicité : La poutre (ou la structure, en général) est soumise à des actions qui forment un système nul : la poutre (la structure) est en équilibre.

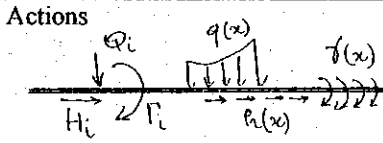
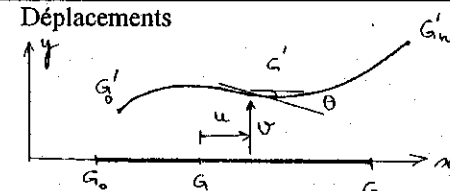
État déformé : La poutre (ou la structure, en général) est déformée, la déformation étant quelconque c.a.d. virtuelle par rapport à l'état sollicité.

Énoncé :

Le travail externe T_e des actions du système sollicité dans les déplacements du système déformé est égal au travail interne T_i des contraintes internes dans les déformations internes du système déformé.

Démonstration : voir MMC

Schématisation :

Etat sollicité	Etat déformé
<p>Actions</p> 	<p>Déplacements</p> 
<p>Sollicitations</p> <p>N</p> <p>V</p> <p>M</p>	<p>Déformations</p> $\begin{cases} \mu(x) = \frac{du}{dx} = \frac{N}{ES} \\ \lambda(x) = \frac{dv}{dx} - \theta(x) = \frac{V}{GS_1} \\ \omega(x) = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \end{cases}$ <p>si torsion $\omega_x = \frac{C}{GJ_1}$</p>
<p>Contraintes</p> <p>σ</p> <p>τ</p>	<p>ϵ déformation longitudinale</p> <p>γ distorsion</p>

En général,

$$T_e = \sum Q_i v_i + H_i u_i + \Gamma_i \theta_i + \int_0^l (qv + hu + \gamma\theta) dx$$

$$T_i = \int_0^l (N\mu + V\lambda + M\omega) dx$$

CALCUL DES DÉPLACEMENTS DANS LES STRUCTURES

ISOSTATIQUES

1 Exemple 1

Preons l'exemple de la structure composée de deux poutres rigidement liées entre elles (figure 1). Le tracé en pointillés donne le schéma de la déformée. Soit à calculer le déplacement horizontal f du sommet de la branche verticale.

Dans l'application du théorème des travaux virtuels, les deux systèmes considérés sont :

(i). le système déformé qui est la structure elle-même telle qu'elle a déjà été calculée. M, N, T étant les sollicitations le long de la structure, les déformations sont :

$$\omega = \frac{M}{EI} \quad \mu = + \frac{N}{E\Omega} \quad \lambda = + \frac{T}{G\Omega_s}$$

$EI, E\Omega, G\Omega_s$ sont respectivement les rigidités de flexion, d'effort normal, et d'effort tranchant des sections le long de la structure. (*) nous supposons que ces termes sont constants sur la structure.

(ii). le système sollicité est la structure à laquelle on applique une force unitaire dont la ligne d'action suit la direction

(*) $I = \iint y^2 d\Omega = \frac{bh^3}{12}$ pour une section rectangulaire $b \times h$
 $\Omega = \iint d\Omega = bh$
 $\Omega_s = \frac{I}{\frac{5}{6}bh} = \frac{5}{6}bh$
 $\int \frac{5}{6} dy$

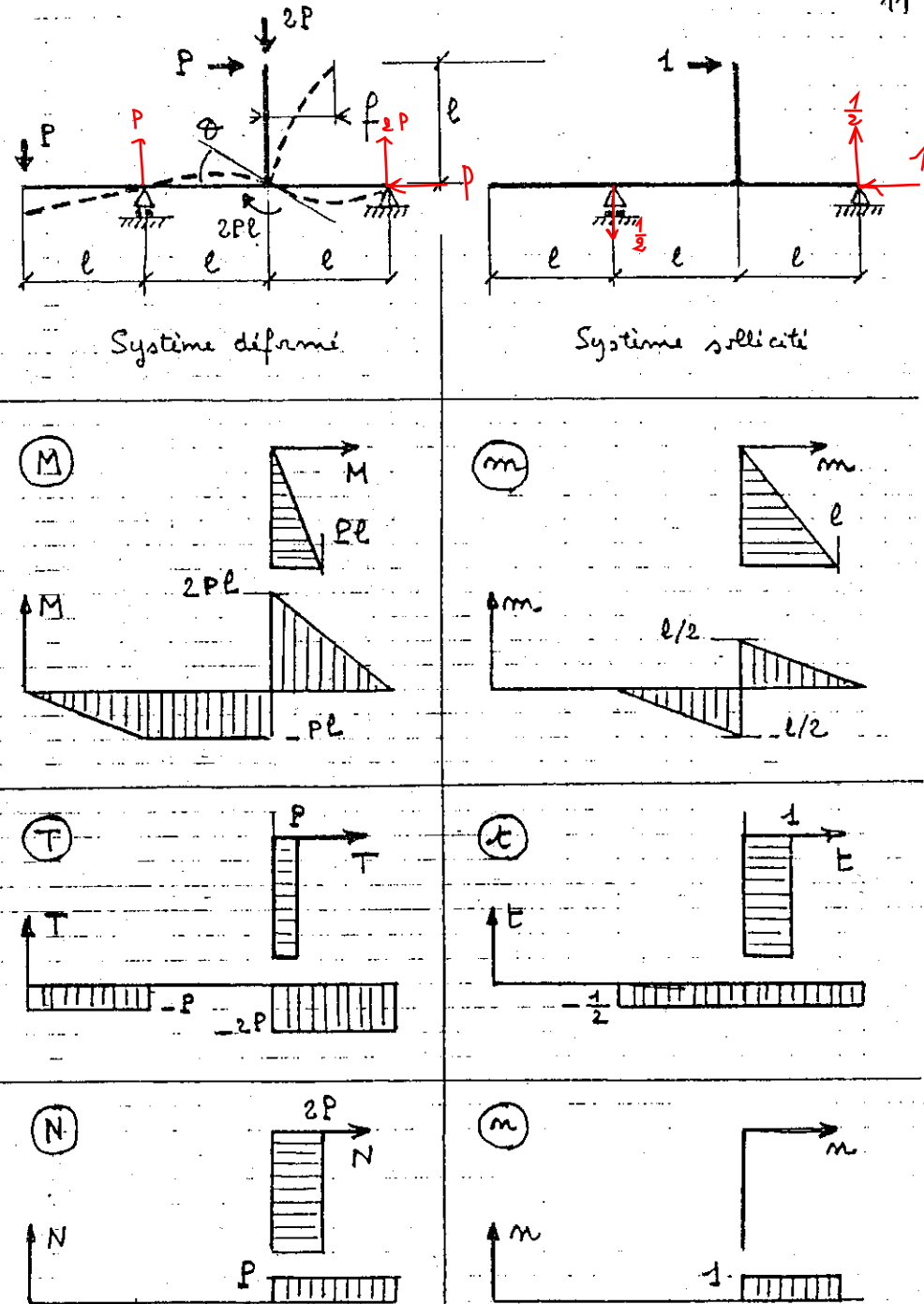


FIGURE 1

du déplacement recherché. Les sollicitations créées par la force unité se calculent aisément puisque la structure est isostatique. Soient m, n, t ces sollicitations le long de la structure (figure 1).

Le travail des forces extérieures \overline{Q}_e du système sollicité dans les déplacements du système déformé est:

$$\overline{Q}_e = 1 \times f = f.$$

Le travail des forces internes \overline{Q}_i (ou plutôt des contraintes internes) du système sollicité dans les déformations du système déformé est (voir chapitres antérieurs):

$$\overline{Q}_i = \int_s (\omega m + \mu n + \lambda t) ds$$

En remplaçant ω, μ, λ par leurs valeurs et en écrivant $\overline{Q}_e = \overline{Q}_i$:

$$f = \int_s \frac{mM}{EI} ds + \int_s \frac{nN}{E\Omega} ds + \int_s \frac{tT}{G\Omega_s} ds$$

Les trois intégrales sont étendues à toute la structure. Elles sont respectivement les déformations dues aux moments: f_1 , aux efforts normaux: f_2 , à l'effort tranchant: f_3 .

En utilisant les intégrales de Mohr pour calculer ces déplacements =

$$f_1 = \left[\begin{array}{c} \text{Diagramme 1: } \frac{l}{2} \text{ (triangle), } -\frac{l}{2} \text{ (rectangle)} \\ \text{Diagramme 2: } \frac{l}{2} \text{ (triangle), } 2Pl \text{ (rectangle)} \\ \text{Diagramme 3: } l \text{ (triangle), } Pl \text{ (rectangle)} \end{array} \right]$$

$$f_1 = \left[\frac{l}{2} \left(-\frac{l}{2}\right) (-Pl) + \frac{l}{3} \left(\frac{l}{2}\right) (2Pl) + \frac{l}{3} (l) (Pl) \right] \frac{1}{EI}$$

$$f_1 = \frac{Pl^3}{EI} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{12} \frac{Pl^3}{EI}$$

$$f_2 = \left[\begin{array}{c} \text{Diagramme 1: } 1 \text{ (rectangle)} \\ \text{Diagramme 2: } P \text{ (rectangle)} \end{array} \right] = \frac{Pl}{E\Omega}$$

$$f_3 = \left[\begin{array}{c} \text{Diagramme 1: } -\frac{1}{2} \text{ (rectangle)} \\ \text{Diagramme 2: } 1 \text{ (rectangle), } -2P \text{ (rectangle)} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagramme 3: } 1 \text{ (rectangle)} \\ \text{Diagramme 4: } P \text{ (rectangle)} \end{array} \right] = \frac{2Pl}{G\Omega_s}$$

$$f = f_1 + f_2 + f_3 = \frac{11}{12} \frac{Pl^3}{EI} + \frac{Pl}{E\Omega} + \frac{2Pl}{G\Omega_s}$$

Remarque 1 En prenant $I = \frac{bh^3}{12}$, $\Omega = bh$, $\Omega_s = \frac{5}{6}bh$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$,

$$\text{on a: } f_2 = \frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{11} \left(\frac{l}{2}\right)^2 \quad \text{soit } f_2 \ll f_1$$

$$f_3 = \frac{f_3}{f_1} = \frac{24(1+\nu)}{55} \left(\frac{l}{2}\right)^2 \quad \text{soit } f_3 \ll f_1$$

donc finalement: $f \approx f_1$

Remarque 2. Le calcul donne une valeur positive de θ . Cela signifie que la direction du déplacement est la même que celle de la force unité du système sollicité.

2.2 Exemple 2 Soit à calculer, dans la même structure la rotation θ du nœud qui réunit les deux poutres. Le système déformé reste le même et le système sollicité est la même structure à laquelle on applique un couple égal à 1 (figure 2)

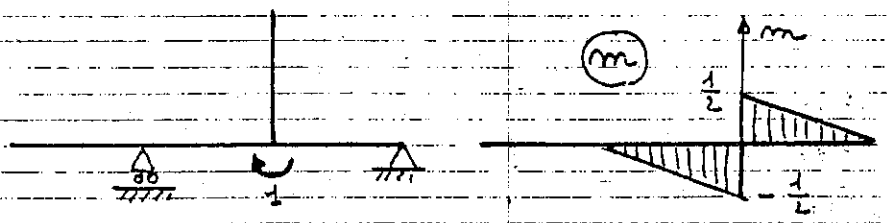
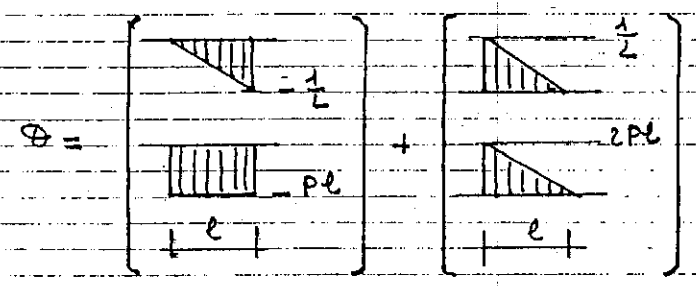


FIGURE 2

En considérant seulement le moment de flexion.

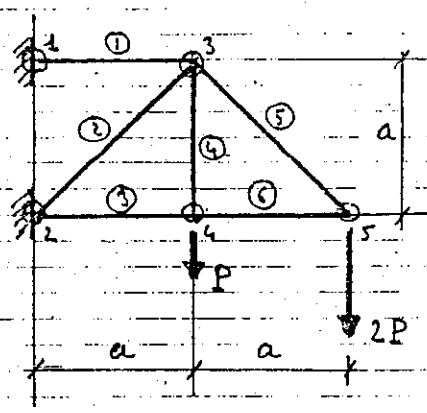


$$\theta = \left[\frac{l}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) (-Pe) + \frac{l}{3} \left(\frac{1}{2} \right) (2Pe) \right] \frac{1}{EI} = \frac{Pe^2}{EI} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right)$$

$$\theta = \frac{7 \cdot Pe^2}{12 EI}$$

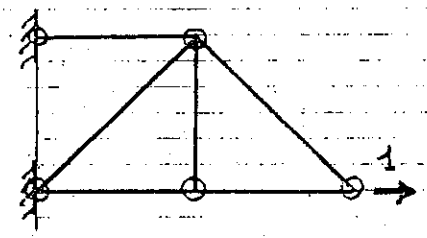
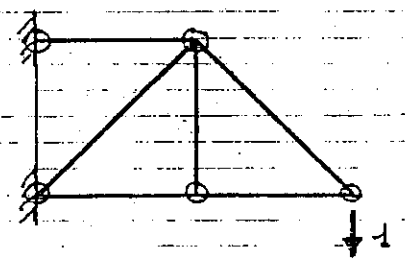
2.3 Exemple 3: structure en treillis. La structure en treillis figure 3 est constituée de 5 nœuds numérotés 1 à 5 et 6 barres de rigidité EA numérotées de ① à ⑥. La résolution du système qui est isostatique ($h = 6 + 4 - 2 \times 5 = 0$) donne les effets internes suivants:

$$(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6) = (-5P, 3P\sqrt{2}, 2P, -P, -2P\sqrt{2}, 2P)$$



Soit à calculer les déplacements verticaux et horizontaux u et v du point 5.

Le système déformé et le système lui-même, les systèmes sollicités sont constitués par la structure elle-même à laquelle on applique une force verticale 1 au point 5 pour calculer v , et une force horizontale 1 au point 5 pour calculer u . Dans ces deux systèmes sollicités, les effets internes sont respectivement:



$$(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6) = (-2, \sqrt{2}, 1, 0, -\sqrt{2}, 1)$$

$$(n'_1, n'_2, n'_3, n'_4, n'_5, n'_6) = (0, 0, -1, 0, 0, -1)$$

FIGURE 3

L'application du théorème des travaux virtuels donne:

$$Q_2 = 1 \times v \quad Q_i = \sum_{i=1}^6 \int_0^{l_i} m_i \frac{N_i}{E\Omega} dz = \sum_{i=1}^6 \frac{m_i N_i l_i}{E\Omega}$$

$$\text{soit } v = \sum_{i=1}^6 \frac{m_i N_i l_i}{E\Omega}$$

Le tableau suivant résume les calculs effectués de v et u .

i	l_i	N_i	m_i	$m_i N_i l_i$	m_i'	$m_i' N_i l_i$
1	a	$-5P$	-2	$10 Pa$	0	0
2	$a\sqrt{2}$	$3P\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$6\sqrt{2} Pa$	0	0
3	a	$2P$	1	$2 Pa$	-1	$-2 Pa$
4	a	$-P$	0	0	0	0
5	$a\sqrt{2}$	$-2P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$4\sqrt{2} Pa$	0	0
6	a	$2P$	1	$2 Pa$	-1	$-2 Pa$

$$\text{sommes:} \quad (14 + 10\sqrt{2}) Pa \quad -4 Pa$$

$$\text{soit:} \quad v = \frac{(14 + 10\sqrt{2}) Pa}{E\Omega} \quad u = -\frac{4 Pa}{E\Omega}$$

2.4. Cas général

les exemples donnés montrent qu'en général, le procédé de calcul d'un déplacement est le suivant:

(i). le système déformé est la structure elle-même avec les charges qui lui sont appliquées. Le long de la structure, les sollicitations calculées sont: $M(s)$, $T(s)$, $N(s)$ et les déplacements sont:

$$w(s) = \frac{M(s)}{EI(s)} \quad \mu = + \frac{N(s)}{E\Omega(s)} \quad d = + \frac{T(s)}{G\Omega_1(s)}$$

(ii). le système sollicité est la structure elle-même chargée par une force (ou un couple) unité dont la ligne d'action est la direction du déplacement recherché. Dans le système, les

sollicitations sont $m(s)$, $t(s)$, $n(s)$.

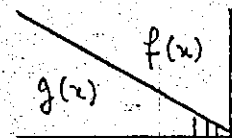

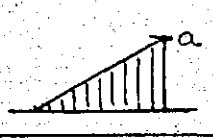
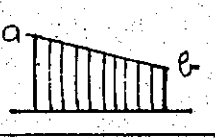

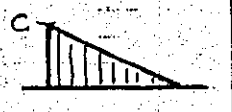





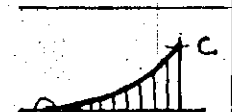

L'application du théorème des travaux virtuels donne le déplacement recherché:

$$\Delta = \int \left(\frac{mM}{EI} + \frac{nN}{E\Omega} + \frac{tT}{G\Omega_1} \right) ds$$

structure total

le signe de Δ oriente le déplacement dans la direction de la force unité appliquée s'il est positif, et dans la direction opposée s'il est négatif.

VALEURS DES INTÉGRALES $\frac{1}{l} \int_0^l f(x)g(x) dx$

			
	ac	$\frac{1}{2} ac$	$\frac{1}{2} c(a+b)$
	$\frac{1}{2} ac$	$\frac{1}{6} ac$	$\frac{1}{6} c(2a+b)$
	$\frac{1}{2} ac$	$\frac{1}{3} ac$	$\frac{1}{6} c(a+2b)$
	$\frac{1}{2} a(c+d)$	$\frac{1}{6} a(c+2d)$	$\frac{1}{6} [2ac+2bd + bc+ad]$
	$\frac{2}{3} ac$	$\frac{1}{3} ac$	$\frac{1}{3} (a+b)c$
	$\frac{2}{3} ac$	$\frac{5}{12} ac$	$\frac{1}{12} (3a+5b)c$
	$\frac{2}{3} ac$	$\frac{1}{4} ac$	$\frac{1}{12} (5a+3b)c$
	$\frac{1}{3} ac$	$\frac{1}{4} ac$	$\frac{1}{12} (a+3b)c$
	$\frac{1}{3} ac$	$\frac{1}{12} ac$	$\frac{1}{12} (3a+b)c$

Instabilités et Flambement

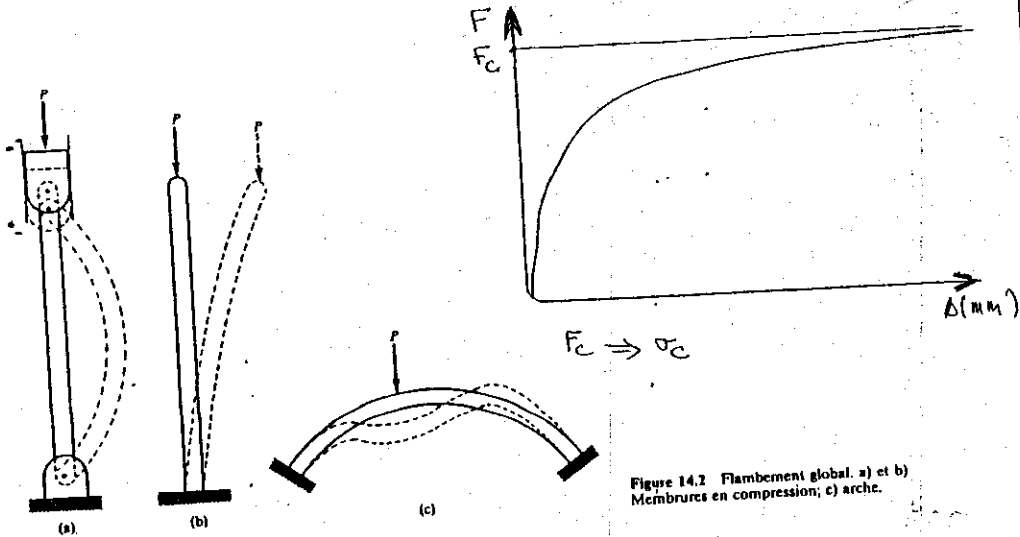


Figure 14.2 Flambement global. a) et b) Membrures en compression; c) arche.

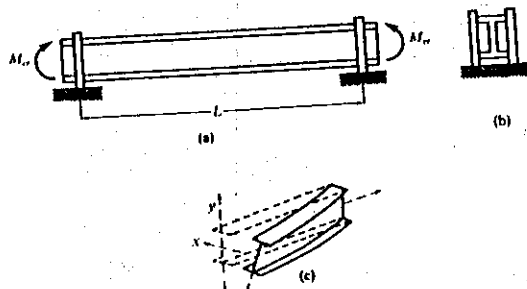
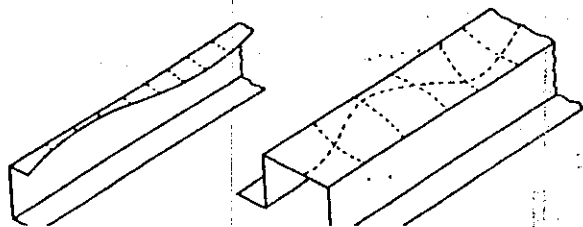


Figure 14.3 Déversement latéral d'une poutre soumise à un moment pur.

Flambement local ou voilement (fig. 14.4). Ce type de flambement, qui affecte les systèmes aux parois relativement minces, se manifeste par l'apparition d'ondulations dans la paroi. Ces ondulations sont orientées dans une direction normale à celle de la contrainte de compression. On peut prévoir les effets de ce mode de flambement : nous en discuterons brièvement à la fin de ce chapitre.



FLAMBEMENT

1- ETUDE D'UN CAS ELEMENTAIRE

1-1 Calcul avec une force secondaire :

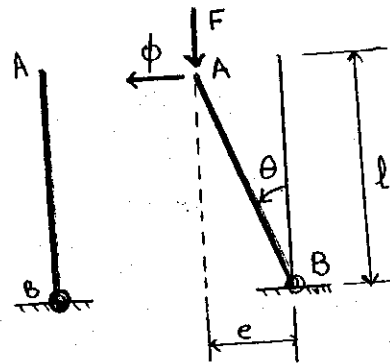


Figure 1

La poutre AB, de longueur l est infiniment rigide. (Figure 1) Le point A est libre, et le point B est un encastrement élastique, c'est à dire que la poutre s'incline d'un angle θ tel que $M = K\theta$ si le moment au point B est M . La poutre AB est chargée en A par la force F verticale et par la force secondaire Φ horizontale. Le moment au point B se compose de deux termes qui sont en supposant que l'angle θ est petit :

$$\begin{cases} M_1 = \Phi l & \text{dû à la force } \Phi \\ M_2 = F\theta & \text{dû à la force } F \end{cases}$$

soit un total : $M = M_1 + M_2 = \Phi l + F\theta$

En écrivant $M = K\theta$ on obtient la valeur de θ qui définit la position d'équilibre :

$$K\theta = \Phi l + F\theta \quad \text{soit } \theta = \frac{\Phi l}{K - F}$$

Cette expression de θ montre que si F dépasse la valeur $\frac{K}{l}$, θ n'est plus déterminé : la structure est instable.

La force $F_c = \frac{K}{l}$ s'appelle la force critique de la structure

Remarque 1 : La force critique F_c ne dépend pas de la force secondaire Φ

Remarque 2 : Si $F < F_c$, il existe un état d'équilibre défini par $\theta = \frac{\Phi l}{K - F}$ qui est fonction de la force secondaire Φ .

1-2 Calcul sans force secondaire :

Supposons $\phi = 0$. Alors, l'équation qui définit θ s'écrit : $K\theta = F\ell$
ou $\theta (K - F\ell) = 0$

Deux cas sont possibles :

- (i) $\theta = 0$: il y a équilibre sans inclinaison
- (ii) $K - F\ell = 0 \Rightarrow F = F_c = \frac{K}{\ell}$: θ est indéterminé : il n'y a pas d'équilibre

Remarque : Si $F < F_c$, l'état d'équilibre est assuré sans déplacement : l'instabilité intervient brutalement lorsque F atteint la valeur F_c .

1-3 Résolution exacte :

Dans le cas précédent : $\phi = 0$, écrivons l'équation de l'équilibre en n'utilisant pas la simplification

$\theta = \sin \theta$: On a : $K\theta = F\ell \sin \theta$
Soit en posant $\lambda = \frac{F}{F_c} = \frac{F\ell}{K}$: $\sin \theta = \frac{\theta}{\lambda}$

La figure 2 montre que si $\lambda < 1$, soit $F < F_c$, les deux courbes $\sin \theta$ et $\frac{\theta}{\lambda}$ ne donnent pas d'intersection pour $\theta > 0$: La poutre est en équilibre avec $\theta = 0$.

Si $\lambda > 1$ soit $F > F_c$, l'intersection des deux courbes donne la valeur de l'angle θ d'équilibre.

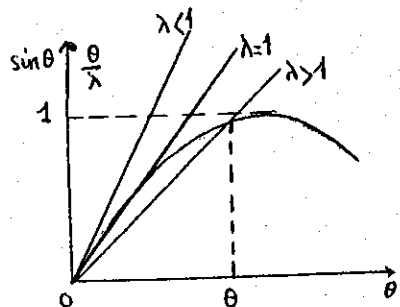


Figure 2

θ	10°	20°	30°	40°
$\frac{F}{F_c} = \lambda = \frac{\theta}{\sin \theta}$	1,005	1,021	1,047	1,086

Mais la variation de θ est très rapide dès que F dépasse la valeur critique F_c .

Le tableau suivant qui donne les valeurs numériques de F/F_c pour $\theta = 10, 20, 30, 40$ degré le montre.

Dans la pratique, le dépassement de F_c entraîne des grandes déformations pour lesquelles les matériaux sortent de leur domaine élastique, entraînant ainsi la ruine de la structure.

1-4 Calcul utilisant l'énergie :

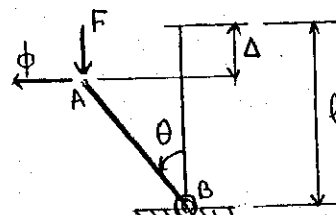


figure 3

Avec :
$$\begin{cases} W_f = F\Delta = F\ell(1 - \cos\theta) \approx \frac{1}{2}F\ell\theta^2 \quad \text{dù à } F \\ W_\phi = \frac{1}{2}\phi\ell \sin\theta \approx \frac{1}{2}\phi\ell\theta \quad \text{dù à } \phi \end{cases}$$

La poutre est soumise d'abord à la force verticale F qui reste constante, puis à la force qui varie de 0 à ϕ . Quand la force ϕ varie de 0 à ϕ pour atteindre la position d'équilibre définie par θ , le travail des forces externes est :

$W_e = W_f + W_\phi$

Remarque : Il n'y a pas le coefficient $\frac{1}{2}$ devant $F\Delta$ car F reste constant pendant le déplacement, et il y a le coefficient $\frac{1}{2}$ devant $\phi\ell \sin\theta$ car ϕ varie de 0 à ϕ pendant le déplacement.

Le travail des forces internes est : $W_i = \frac{1}{2}M\theta = \frac{1}{2}K\theta^2$

En écrivant $W_e = W_i$, on obtient :

$$\frac{1}{2}F\ell\theta^2 + \frac{1}{2}\phi\ell\theta = \frac{1}{2}K\theta^2 \text{ soit } \theta = \frac{\phi\ell}{K - F\ell}$$

Lorsque la force F est appliquée, le travail développé par ϕ pour obtenir le déplacement θ est :

$$W_\phi = W_i - W_f = \frac{1}{2}K\theta^2 - \frac{1}{2}F\ell\theta^2 = \frac{1}{2}(K - F\ell)\theta^2$$

Or d'après le théorème de Lejeune-Dirichlet, pour que la stabilité soit assurée, il faut que W_ϕ soit positif.

Soit : $W_\phi = \frac{1}{2}(K - F\ell)\theta^2 > 0$ ou $K - F\ell > 0$ ou $F < F_c = \frac{K}{\ell}$

Nous retrouvons bien les résultats obtenus plus haut.

2- ETUDE D'UNE POUTRE ENCASTREE A SA BASE

2-1 Calcul avec une force secondaire horizontale

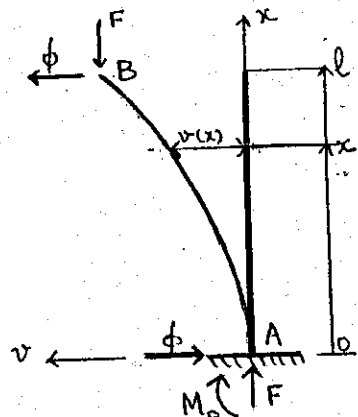


Figure 4

La poutre AB de longueur l de rigidité EI encastrée en A est soumise aux forces F et ϕ .

La flèche prise par la poutre dans sa position d'équilibre est $v(x)$.

Pour que l'équilibre soit assuré, l'encastrement développe les réactions F ϕ M_0 portées sur la Figure 4. Avec :

$$M_0 - \phi l - Fv(l) = 0$$

Le moment au point d'abscisse x est

$$M(x) = M_0 - Fv(x) - \phi x$$

La flèche $v(x)$ est donnée par

l'équation différentielle : $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$

Soit : $\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{F}{EI}v = \frac{1}{EI}[M_0 - \phi x]$

En posant $K^2 = F/EI$ on a :

$$v(x) = A \sin Kx + B \cos Kx + \frac{M_0 - \phi x}{F}$$

A, B, M_0 sont des constantes, $\frac{M_0 - \phi x}{F}$ est une solution particulière évidente de l'équation.

Il reste à calculer les trois constantes A B M_0 en exprimant les conditions aux limites :

(i) : $v(0) = 0$ d'où $0 = B + \frac{M_0}{F}$ $B = -\frac{M_0}{F}$

(ii) : $\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 = 0$ d'où $AK - \frac{\phi}{F} = 0$ $A = \frac{\phi}{KF}$

(iii) : $M_0 - \phi l - Fv(l) = 0$

d'où $M_0 - \phi l - FA \sin Kl - FB \cos Kl - M_0 + \phi l = 0$

$$-\frac{\phi}{K} \sin Kl + M_0 \cos Kl = 0 \Rightarrow M_0 = \frac{\phi}{K} \operatorname{tg} Kl$$

Soit :

$$v(x) = \frac{\phi}{KF} [\sin Kx - \operatorname{tg} Kl \cos Kx + \operatorname{tg} Kl - Kx]$$

L'équilibre est assuré lorsque v peut être calculé, c'est à dire lorsque $\operatorname{tg} Kl$ est déterminé

Il y a donc instabilité pour :

$$Kl = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi}{2}(1 + 2n)$$

$$K^2 = \frac{F}{EI} \Rightarrow \frac{F}{EI} l^2 = \frac{\pi^2}{4}(1 + 2n)^2$$

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}(1 + 2n)^2$$

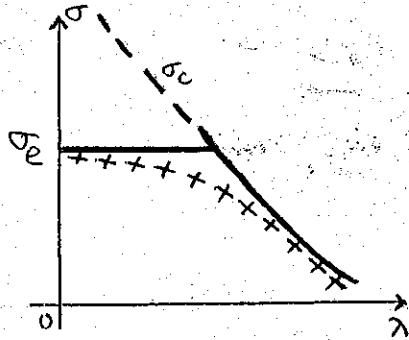
$n = 0$ donne la valeur de F_c la plus faible : $F_c = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$ qui est la force critique de la poutre ou force critique d'Euler.

Remarque 1 F_c ne dépend pas de ϕ

Remarque 2 Si $F < F_c$ il existe un état d'équilibre défini par la flèche $v(x)$ dont l'expression a été calculée.

6- FORCE CRITIQUE D'EULER ET REALITE

6-1 Matériau élasto-plastique : l'acier



— courbe limite théorique
 +++ courbe limite réelle
 figure 11

La contrainte est donnée par $\sigma_c = \frac{\Pi^2 E}{\lambda^2}$. Soit σ_e la contrainte de limite d'élasticité de l'acier. Pour éviter la ruine, il faut donc vérifier :

$$\begin{cases} \sigma < \sigma_c = \frac{\Pi^2 E}{\lambda^2} \\ \sigma < \sigma_e \end{cases}$$

La figure 11 donne la frontière à ne pas dépasser en fonction de l'élancement. En fait, compte tenu des forces secondaires et des excentremets des forces, la contrainte σ_c est atteinte pour des forces plus faibles. Ainsi, la courbe limite est disposée sous la courbe

précédente. Ce sont des courbes forfaitaires semblables qui sont codifiées par les règles de construction métallique.

6-2 Matériau complexe : béton armé

Le terme EI , ou plutôt le rapport entre le moment M et la courbure est une fonction décroissante de l'effort normal N et du moment M , à cause de la non-élasticité du béton et de sa fissuration. Ainsi, des procédés de calcul spéciaux sont nécessaires mais ne sont pas développés ici.