

Structure

Résistance des **matériaux**

11^e édition

Cours et exercices corrigés



Jean-Claude Doubrère

EYROLLES

Résistance des **matériaux**

11^e édition

Cours et exercices corrigés

Cet ouvrage est la onzième édition du *Cours pratique de résistance des matériaux*, entièrement revue, augmentée et mise à jour. Accessible à toute personne ayant une culture mathématique du niveau du baccalauréat scientifique, il a été rédigé à l'usage des techniciens de génie civil appelés, à l'occasion de leur profession, à dresser de petits projets d'ouvrages d'art ou de bâtiment.

Plutôt que l'exhaustivité et la théorie, l'auteur a recherché à faire de cet ouvrage un outil pratique comprenant de nombreux exemples concrets, accompagnés d'exercices avec leurs solutions.

Il ne s'agit donc ni d'un cours purement théorique, ni d'un cours complet à destination d'ingénieurs, mais d'un cours pratique élémentaire (tout en étant relativement complet), ne comprenant aucune démonstration, mais contenant de nombreux exemples concrets ainsi que des exercices que le lecteur est invité à résoudre. Afin de permettre de vérifier l'exactitude de sa solution, les réponses sont données à la fin de chaque exercice.

La connaissance approfondie de ces notions de résistance des matériaux permettra par la suite de s'intéresser aux différentes techniques de construction : béton armé, béton précontraint, construction métallique, construction bois, construction maçonnerie, etc.

Jean-Claude Doubrère, est Ingénieur général des Ponts et Chaussées honoraire, il a étudié et fait réaliser de nombreux ouvrages de génie civil dans les domaines des travaux maritimes (jetées, murs de quai, appontements, tant pour des ports de commerce que pour des ports de plaisance) et des travaux routiers (ponts en acier, béton armé et béton précontraint, murs de soutènement, etc.). Il enseigne depuis plus de trente ans la résistance des matériaux et le béton armé.

Résistance des **matériaux**

Cours et exercices corrigés

Eurocode 2

J.-M. PAILLÉ . – **Calcul des structures en béton**, G12043, 2009.

J. ROUX. – **Pratique de l'eurocode 2 (tome 1)**, G12044, 2009.

J. ROUX. – **Maîtrise de l'eurocode 2 (tome 2)**, G12160, 2009.

Y. BENOIT , B. LEGRAND , V. TASTET. – **Calcul des structures en bois**, 2^e édition, G12481, 2009.

M. HUREZ , N. JURASZEK , M. PELCÉ. – **Dimensionner les ouvrages de maçonnerie**, 12280, 2009.

V. DAVIDOVICI. – **Constructions parasismiques** (à paraître).

Le programme des Eurocodes structuraux comprend les normes suivantes, chacune étant en général constituée d'un certain nombre de parties :

EN 1990 Eurocode 0 : Bases de calcul des structures

EN 1991 Eurocode 1 : Actions sur les structures

EN 1992 Eurocode 2 : Calcul des structures en béton

EN 1993 Eurocode 3 : Calcul des structures en acier

EN 1994 Eurocode 4 : Calcul des structures mixtes acier-béton

EN 1995 Eurocode 5 : Calcul des structures en bois

EN 1996 Eurocode 6 : Calcul des structures en maçonnerie

EN 1997 Eurocode 7 : Calcul géotechnique

EN 1998 Eurocode 8 : Calcul des structures pour leur résistance aux séismes

EN 1999 Eurocode 9 : Calcul des structures en aluminium

Les normes Eurocodes reconnaissent la responsabilité des autorités réglementaires dans chaque État membre et ont sauvegardé le droit de celles-ci de déterminer, au niveau national, des valeurs relatives aux questions réglementaires de sécurité, là où ces valeurs continuent à différer d'un État à un autre.

Résistance des **matériaux**

Cours et exercices corrigés

Jean-Claude Doubrère

Onzième édition 2010

EYROLLES



ÉDITIONS EYROLLES
61, bld Saint-Germain
75240 Paris Cedex 05
www.editions-eyrolles.com



Le code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée notamment dans les établissements d'enseignement, provoquant une baisse brutale des achats de livres, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

En application de la loi du 11 mars 1957, il est interdit de reproduire intégralement ou partiellement le présent ouvrage, sur quelque support que ce soit, sans l'autorisation de l'Éditeur ou du Centre Français d'exploitation du droit de copie, 20, rue des Grands Augustins, 75006 Paris.

© Groupe Eyrolles, 1969, 1972, 1974, 1977, 1979, 1983, 1998, 2001, 2010, ISBN : 978-2-212-12777-5

Sommaire

INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1. NOTIONS DE STATIQUE	3
1.1. FORCES ET MOMENTS DE FORCES	3
1.1.1. Forces	3
1.1.1.1. Notion de forces	3
1.1.1.2. Équilibre d'un solide soumis à des forces concourantes	4
1.1.1.3. Équilibre d'un solide soumis à des forces parallèles	5
1.1.1.4. Types de forces de la résistance des matériaux	7
1.1.2. Moments de forces	8
1.1.2.1. Moment d'une force par rapport à un axe	8
1.1.2.2. Équilibre d'un solide mobile autour d'un axe	9
1.1.2.3. Théorème des moments	10
1.1.2.4. Les couples de forces	10
1.2. ACTIONS ET RÉACTIONS	11
1.3. ÉQUILIBRE D'UN SOLIDE	11
1.4. NOTIONS DE STATIQUE GRAPHIQUE : DYNAMIQUES ET FUNICULAIRES	13
1.5. EXERCICES	22
1.5.1. Poutre sur appuis simples : calcul des réactions d'appui	22
1.5.2. Poutre avec double appui simple : calcul des réactions d'appui	23
CHAPITRE 2. MOMENT STATIQUE ET MOMENT D'INERTIE D'UNE SURFACE	25
2.1. MOMENT STATIQUE	25
2.2. MOMENT D'INERTIE	27
2.3. MODULE D'INERTIE	28

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

2.4. TABLEAU DES DIFFÉRENTS MOMENTS ET MODULES POUR LES FIGURES SIMPLES	29
2.5. EXERCICES	33
2.5.1. Calcul du moment et module d'inertie d'un rectangle évidé.	33
2.5.2. Calcul du moment et module d'inertie d'une cornière	34
2.5.3. Calcul du moment et module d'inertie d'un fer en té	35
CHAPITRE 3. GÉNÉRALITÉS SUR LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX	37
<hr/>	
3.1. BUT DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX	37
3.2. NOTION DE CONTRAINTE	37
3.3. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE LA RELATION ENTRE CONTRAINTES ET DÉFORMATIONS	39
3.4. CONTRAINTES ADMISSIBLES - NOTION DE COEFFICIENT DE SÉCURITÉ	43
3.5. EXERCICES	44
CHAPITRE 4. LES POUTRES	45
<hr/>	
4.1. DÉFINITION D'UNE POUTRE	45
4.2. FORCES APPLIQUÉES AUX POUTRES	46
4.2.1. Forces données	46
4.2.2. Réactions d'appui	46
4.2.3. Relations entre forces données et réactions d'appui	47
4.3. PREMIÈRE HYPOTHÈSE FONDAMENTALE DE LA THÉORIE DES POUTRES : PRINCIPE DE SAINT-VENANT	47
4.3.1. Principe de Saint-Venant	47
4.3.2. Système des forces extérieures à une section	49
4.3.3. Application : poutre droite sur appuis simples	51
4.4. SECONDE HYPOTHÈSE FONDAMENTALE DE LA THÉORIE DES POUTRES : PRINCIPE DE NAVIER-BERNOULLI	53
4.5. EXERCICE : ARC SYMÉTRIQUE À TROIS ARTICULATIONS	53
CHAPITRE 5. CONTRAINTES DUES À L'EFFORT NORMAL ET AU MOMENT FLÉCHISSANT	57
<hr/>	
5.1. ÉTUDE DE L'EFFORT NORMAL. COMPRESSION OU TRACTION SIMPLE . . .	57
5.2. ÉTUDE DU MOMENT FLÉCHISSANT	58
5.2.1. Flexion pure	58
5.2.2. Flexion simple	61
5.2.3. Flexion composée	61
5.2.4. Noyau central - Résistance des maçonneries	63

5.3. EXERCICES	65
5.3.1. Étude d'une poutre métallique	65
5.3.2. Étude d'une section circulaire	66
5.3.3. Étude d'une fondation	67
CHAPITRE 6. CONTRAINTES PRODUITES PAR L'EFFORT TRANCHANT	71
6.1. GÉNÉRALITÉS	71
6.2. CALCUL DE LA CONTRAINTE DE CISAILLEMENT	72
6.3. ÉTUDE DE QUELQUES SECTIONS PARTICULIÈRES	78
6.3.1. Section rectangulaire de hauteur $2h$ et de largeur b	78
6.3.2. Section circulaire de rayon R	79
6.3.3. Section en double-té symétrique par rapport à l'axe Gz	79
6.4. EXERCICES	80
6.4.1. Étude d'une poutre de section rectangulaire	80
6.4.2. Poutre de section rectangulaire. Autre section	82
CHAPITRE 7. CONTRAINTES ENGENDRÉES PAR LE MOMENT DE TORSION	83
7.1. RÉSULTATS DE LA THÉORIE DE LA TORSION	83
7.1.1. Section elliptique	83
7.1.2. Section circulaire	84
7.1.3. Section rectangulaire	85
7.2. EXERCICES	85
7.2.1. Étude d'un barreau circulaire	85
7.2.2. Étude d'une tôle d'acier	86
CHAPITRE 8. POUTRES DROITES ISOSTATIQUES	87
8.1. POUTRES SUR APPUIS SIMPLES	87
8.1.1. Définition	87
8.1.2. Calcul des efforts et des moments sous une charge concentrée - Lignes d'influence	88
8.1.2.1. Calcul des efforts et des moments	88
8.1.2.2. Lignes d'influence	89
8.1.3. Systèmes de charges concentrées : principe de superposition des charges - Effet d'un convoi - Théorème de Barré	91
8.1.3.1. Systèmes de charges concentrées : principe de superposition des charges	91
8.1.3.2. Effet d'un convoi - Théorème de Barré	96

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

8.1.4. Cas de charges réparties	97
8.1.5. Lignes enveloppes	99
8.1.6. Calcul des flèches	101
8.2. CONSOLES	103
8.2.1. Définition	103
8.2.2. Détermination de l'effort tranchant et du moment fléchissant sous une charge concentrée - Ligne d'influence	103
8.2.3. Cas d'une charge uniformément répartie	105
8.2.4. Calcul des flèches	105
8.3. ÉTUDE DES POUTRES CONSOLES	106
8.4. EXERCICES	107
8.4.1. Poutre sur appuis simples	107
8.4.2. Calcul de la flèche à l'extrémité d'une console	111
8.4.3. Étude d'une poutre console	112

CHAPITRE 9. POUTRES DROITES HYPERSTATIQUES 115

9.1. GÉNÉRALITÉS	115
9.2. FORMULES VALABLES POUR TOUTES LES POUTRES HYPERSTATIQUES . . .	116
9.3. POUTRE ENCASTRÉE À SES DEUX EXTRÉMITÉS	118
9.4. POUTRE ENCASTRÉE À UNE EXTRÉMITÉ, SUR APPUI SIMPLE À L'AUTRE	119
9.5. POUTRES CONTINUES	121
9.6. CAS PARTICULIER DES BÂTIMENTS COURANTS EN BÉTON ARMÉ.	123
9.6.1. Domaine d'application	124
9.6.1.1. Principe de la méthode	124
9.6.1.2. Conditions d'application de la méthode - Valeurs des coefficients	124
9.7. EXERCICES	125
9.7.1. Poutre encastrée à une extrémité, sur appui simple à l'autre	125
9.7.2. Poutre continue à deux travées égales	126
9.7.3. Poutre continue à trois travées égales	128
9.7.4. Poutre continue à quatre travées égales	130

CHAPITRE 10. SYSTÈMES RÉTICULÉS ISOSTATIQUES 131

10.1. DÉFINITIONS	131
10.2. MÉTHODE DES NŒUDS - ÉPURE DE CRÉMONA.	132
10.3. MÉTHODE DES SECTIONS	136
10.4. EXERCICE : POUTRE TRIANGULÉE	138

CHAPITRE 11. STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE ÉLASTIQUE	143
11.1. INTRODUCTION	143
11.2. POUTRE SUR APPUIS SIMPLES, DE SECTION CONSTANTE, COMPRIMÉE ET FLÉCHIE	144
11.3. FLAMBEMENT DES POUTRES DROITES DE SECTION CONSTANTE	145
11.3.1. Poutre articulée à ses extrémités	145
11.3.2. Poutres soumises à des conditions aux limites diverses.	146
11.3.3. Sécurité vis-à-vis du flambement - Contraintes admissibles	148
11.4. PRESCRIPTIONS DES RÈGLEMENTS EN VIGUEUR	148
11.4.1. Règlements relatifs aux constructions métalliques	149
11.4.1.1. Règles de calcul des constructions en acier : Règles CM 1966 et l'additif 80	149
11.4.1.2. Cahier des prescriptions communes applicables aux marchés de travaux publics passés au nom de l'État, fascicule 61, titre V : Conception et calcul des ponts et constructions métalliques en acier	150
11.4.2. Règlement relatif au béton armé	150
11.5. EXERCICES.	151
11.5.1. Barre d'acier de section rectangulaire	151
11.5.2. Poteau comprimé	153
ANNEXE A. RAPPELS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE	157
A.1. FONCTION DÉRIVÉE	157
A.1.1. Exemple : fonction linéaire	158
A.1.2. Exemple : fonction du second degré	158
A.1.3. Exemple : fonction de degré n	158
A.1.4. Dérivées d'une somme, d'un produit, ou d'un quotient de fonctions dérivables.	158
A.1.5. Dérivée d'une fonction de fonction	159
A.1.6. Rappel de quelques dérivées de fonctions	159
A.1.7. Dérivée de la fonction réciproque d'une fonction dérivable.	159
A.2. NOTION D'INTÉGRALE DÉFINIE.	159
A.2.1. Propriétés de l'intégrale définie.	160
A.2.2. Fonction définie par une intégrale	160
A.3. FONCTIONS PRIMITIVES.	161
A.3.1. Définition	161
A.3.2. Fonction primitive de valeur donnée en un point donné	161
A.3.3. Relation entre intégrale définie et primitive	162
A.3.4. Intégrale indéfinie	162

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

A.3.5. Recherche des fonctions primitives d'une fonction donnée	162
A.3.5.1. Fonctions primitives usuelles	162
A.3.5.2. Intégration par parties	165
A.3.6. Aire d'une surface plane	165
A.4. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	166
A.4.1. Équations du premier ordre	166
A.4.2. Exemples d'équations différentielles du second ordre	166

ANNEXE B. SYMBOLES ET NOTATIONS

169

Introduction

Le cours développé dans les pages suivantes a été rédigé à l'usage des techniciens de génie civil appelés, à l'occasion de leur profession, à dresser de petits projets d'ouvrages d'art ou de bâtiment.

Il ne s'agit donc :

- ni d'un cours purement théorique,
- ni d'un cours complet à destination d'ingénieurs, mais d'un cours pratique élémentaire (tout en étant relativement complet), ne comprenant aucune démonstration, mais contenant de nombreux exemples concrets ainsi que des exercices que le lecteur est invité à résoudre. Pour permettre au lecteur de vérifier l'exactitude de sa solution, les réponses sont données à la fin de chaque exercice.

Cet ouvrage est accessible à toute personne ayant une culture mathématique du niveau du baccalauréat scientifique.

La connaissance approfondie de ces notions de résistance des matériaux permettra par la suite de s'intéresser aux différentes techniques de construction : béton armé, béton précontraint, construction métallique, construction bois, construction maçonnerie etc.

Les unités de mesure utilisées sont les unités légales du Système International (S.I.) :

- longueur : le mètre (m) ;
- masse : le kilogramme (kg) ;
- temps : la seconde (s) ;
- force : le newton (N), force imprimant à une masse de 1 kg une accélération de $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- travail et énergie : le joule (J) égal à 1 mètre \times newton (mN) ;
- moment : le mètre \times newton (mN) ;
- pression et contrainte : le pascal (Pa), correspondant à 1 N/m^2 ;

Outre les unités de base citées ci-dessus, on trouve parfois des multiples, par exemple le bar, correspondant à une pression de un décanewton par centimètre carré (1 daN/cm^2), rappelant l'ancienne unité courante kilogramme-force/cm² ⁽¹⁾. Ainsi le kgf vaut 9,81 N, valeur assimilée souvent à 10 N, soit 1 daN. Le bar correspond

1. Rappelons en effet que le kgf était la force imprimant à une masse de 1 kg-masse une accélération égale à l'accélération de la pesanteur, soit environ $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

à 10^5 Pa. L'hectobar (hb), utilisé souvent en construction métallique, rappelle le kgf/mm^2 . Il vaut 10^7 Pa.

De la même manière, l'ancienne unité tonne-force/ m^2 correspond sensiblement à 10^4 Pa.

Notions de statique

1

1.1. FORCES ET MOMENTS DE FORCES

1.1.1. FORCES

1.1.1.1. Notion de forces

Quelle que soit leur nature, et quelle que soit la façon dont elles se manifestent (à distance ou au contact de deux corps), les forces (par exemple le poids d'un corps), sont, en résistance des matériaux comme en physique traditionnelle, des *grandeurs vectorielles*.

Il faut donc, chaque fois que l'on considère une force, rechercher :

- la droite d'action (la direction),
- le sens,
- le point d'application,
- l'intensité.

• La droite d'action

Si une force s'exerce, par exemple, par l'intermédiaire d'un fil tendu, la droite d'action de la force est celle que matérialise le fil. De même, si une force est transmise par une tige rigide, cette tige matérialise la droite d'action de la force.

• Le sens

Le sens d'une force est celui du mouvement qu'elle tend à produire ; si force et mouvement sont dans le même sens la force est dite *motrice* ; dans le cas contraire, la force est dite *résistante*. Par exemple, les forces de frottement sont des forces résistantes.

• Le point d'application

Si un solide est tiré par un fil ou poussé par une tige rigide, le point d'application est le point d'attache du fil ou le point de contact de la tige.

Dans le cas du poids d'un corps, le point d'application est le centre de gravité de ce corps.

• L'intensité

L'intensité mesure la grandeur de la force. Elle s'exprime en Newton (N).

1.1.1.2. Équilibre d'un solide soumis à des forces concourantes

Nous considérerons successivement des forces opposées (supportées par le même axe), et des forces concourantes (dont les lignes d'action passent par un même point).

Deux forces égales mais opposées s'équilibrent.

En effet, les vecteurs qui les représentent sont des vecteurs glissants opposés, dont la somme est nulle.

L'équilibre des appuis ou des fixations amène ainsi à envisager l'existence de forces de liaison (ou de réaction) opposées aux forces de sollicitation.

Par exemple, dans le cas du point d'attache B de la figure 1.1, sollicité par la traction du fil, l'équilibre du système n'est possible que s'il existe, au point B, une réaction \vec{R} égale, mais opposée, à la force de sollicitation \vec{F} .

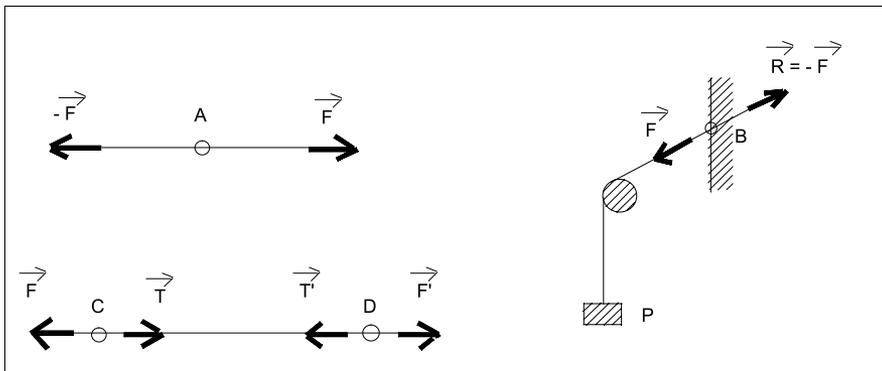


Figure 1.1. Forces opposées.

De la même façon, considérons un fil non pesant tendu grâce à l'action de deux forces \vec{F} et \vec{F}' , égales et opposées, appliquées respectivement en C et D; l'équilibre des points C et D justifie l'existence, en ces points, de forces de liaison \vec{T} et \vec{T}' , égales et opposées à \vec{F} et \vec{F}' .

L'intensité égale de ces forces \vec{T} et \vec{T}' mesure la *tension* du fil.

• **Forces concourantes**

Ce sont des forces dont les droites d'action passent par le même point.

La résultante \vec{R} de forces concourantes est représentée vectoriellement par la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs figurant ces forces.

L'abscisse du vecteur résultant est égale à la somme des abscisses des vecteurs composants. Il en est de même en ce qui concerne les ordonnées (figure 1.2).

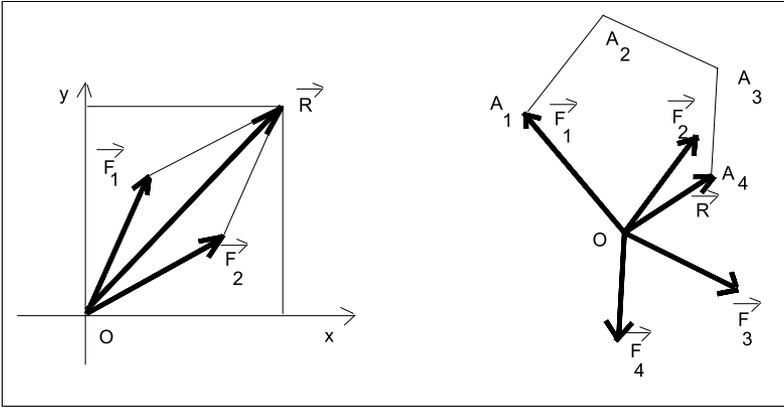


Figure 1.2. Forces concourantes.

Inversement, on peut décomposer une force \vec{F} en deux forces composantes concourantes portées par deux axes OX et OY, en reconstituant le parallélogramme précédent.

Si un solide est soumis à plusieurs forces concourantes, on détermine la résultante de l'ensemble en construisant le *polygone des forces*. Par exemple, dans le cas de la figure 1.2, à partir de l'extrémité A_1 du vecteur \vec{F}_1 , on porte un vecteur A_1A_2 , **équipollent**⁽²⁾ à \vec{F}_2 . À partir de A_2 , on porte un vecteur équipollent à \vec{F}_3 , etc. Le vecteur OA_4 ainsi obtenu est la résultante des quatre forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$.

1.1.1.3. **Équilibre d'un solide soumis à des forces parallèles**

• **Forces de même sens**

La résultante de deux forces \vec{F}_A et \vec{F}_B parallèles et de même sens est une force parallèle à ces deux forces, de même sens qu'elles, et d'intensité égale à la somme de leurs intensités (figure 1.3, page suivante) :

$$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B. \tag{1.1}$$

2. Un vecteur *équipollent* à un autre vecteur est un vecteur de même intensité et de même sens, placé sur la même droite d'action ou sur une droite d'action parallèle.

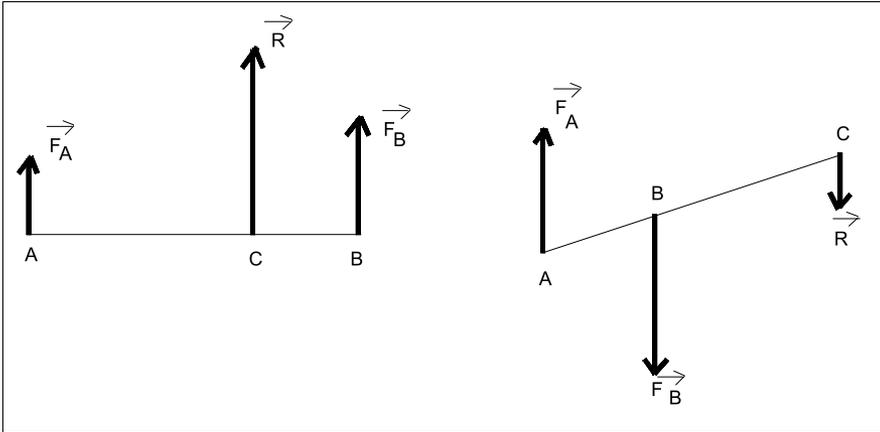


Figure 1.3. Forces parallèles de même sens (à gauche) et de sens contraires (à droite).

D'autre part, le point d'application de la résultante \vec{R} est un point C situé sur le segment AB, entre A et B, tel que :

$$\vec{F}_A \times CA = \vec{F}_B \times CE$$

• **Forces parallèles et de sens contraires**

Deux forces \vec{F}_A et \vec{F}_B parallèles et de sens contraires (figure 1.3) admettent une résultante \vec{R} parallèle à ces forces, du sens de la plus grande, et d'intensité égale à la différence de leurs intensités :

$$\vec{R} = \vec{F}_B - \vec{F}_A \tag{1.2}$$

D'autre part, le point d'application de la résultante \vec{R} est un point C situé sur la droite AB, à l'extérieur du segment AB, du côté de la plus grande composante, et tel que :

$$|\vec{F}_A \times CA| = |\vec{F}_B \times CB|$$

• **Composition de forces parallèles**

Pour composer un nombre quelconque de forces parallèles, il faut d'abord considérer toutes les forces de même sens, et on les compose deux par deux jusqu'à trouver leur résultante en appliquant la règle (1.1).

Puis il faut réitérer la même opération pour toutes les forces de l'autre sens en appliquant également la règle (1.1).

On obtient ainsi deux résultantes partielles, parallèles et de sens contraires, auxquelles on applique la règle (1.2). La résultante générale passe par un point appelé *centre des forces parallèles*.

Si les deux résultantes partielles ont la même intensité, elles constituent un *couple* de forces.

• **Propriétés d'un centre de gravité**

Le *centre de gravité* G d'un solide, point d'application de son poids, a les propriétés d'un centre de forces parallèles.

1.1.1.4. Types de forces de la résistance des matériaux

Nous ne considérerons dans la suite de l'ouvrage, que des forces situées dans un plan, ce plan étant en général un plan de symétrie vertical de l'ouvrage étudié, (par exemple, le plan de symétrie d'une poutre de section en forme de té, comme indiqué sur la figure 1.4).

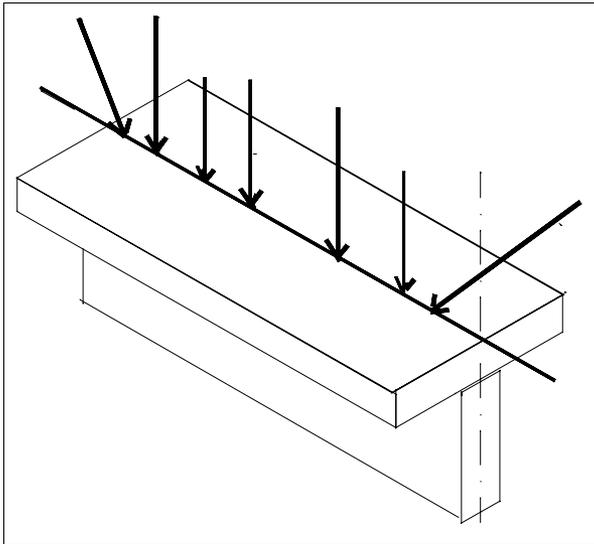


Figure 1.4. Forces appliquées à une poutre à plan moyen.

Les forces appliquées aux ouvrages peuvent être :

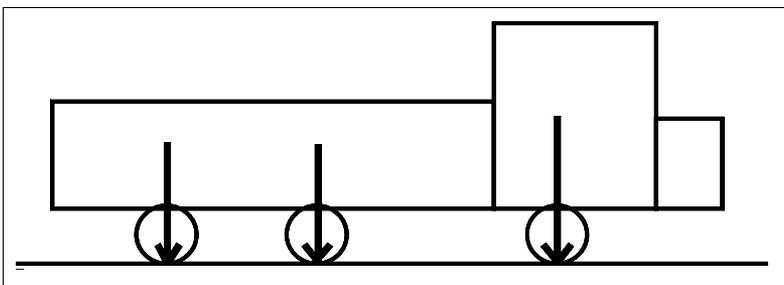


Figure 1.5. Charges concentrées.

– soit des forces dites *concentrées* (par exemple, la réaction donnée par une articulation, ou encore l'action d'une roue d'un véhicule). Ces forces sont appliquées en

réalité sur une petite surface, mais sont assimilées, le plus souvent pour le calcul, à des forces ponctuelles ;

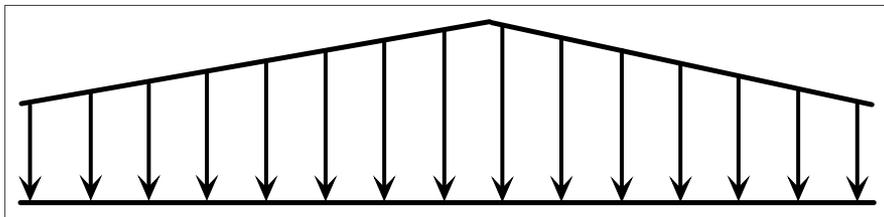


Figure 1.6. Charges réparties.

– soit des forces dites *réparties* (par exemple, le poids propre d'une poutre ou la surcharge correspondant à une couche de neige).

Les forces, représentées par des vecteurs, sont comptées **positivement** si elles sont dirigées du bas vers le haut, et **négativement** dans le cas contraire.

1.1.2. MOMENTS DE FORCES

1.1.2.1. Moment d'une force par rapport à un axe

Faisons l'expérience suivante :

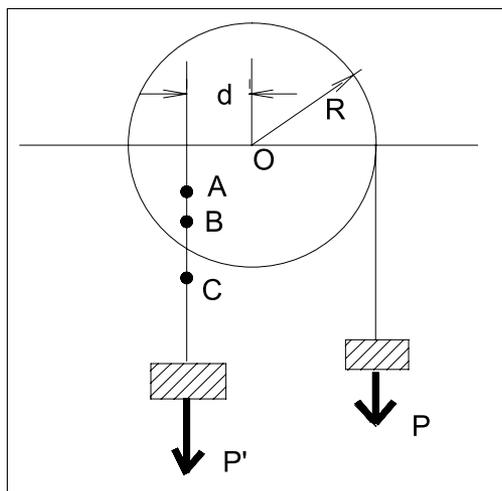


Figure 1.7. Moment d'une force par rapport à un axe.

Une roue à gorge de centre O et de rayon R (figure 1.7) est placée de manière à tourner librement autour de l'axe horizontal perpendiculaire en O au plan de la figure.

Un fil entouré autour de la gorge et fixé à celle-ci par l'une de ses extrémités, supporte à son autre extrémité un poids \bar{P} .

Sous l'action de ce poids, la roue a tendance à tourner dans le sens de rotation des aiguilles d'une montre. Pour l'empêcher de tourner, il faut attacher en un point quelconque A, par l'intermédiaire d'un autre fil, un poids \bar{P}' d'intensité suffisante. On obtient ainsi un équilibre *stable*. En effet si l'on écarte la roue de cette position d'équilibre, en la faisant tourner légèrement dans un sens ou dans l'autre, elle y revient d'elle-même après quelques oscillations.

Si l'on transporte le point d'attache du poids \bar{P}' en un autre point B ou C, *situé sur la verticale* de A, l'équilibre subsiste.

D'autre part, on constate que le produit $P' \times d$ est égal au produit $P \times R$. Les produits $P' \times d$ et $P \times R$ représentent les *moments* des poids \bar{P}' et \bar{P} par rapport à l'axe de rotation.

1.1.2.2. Équilibre d'un solide mobile autour d'un axe

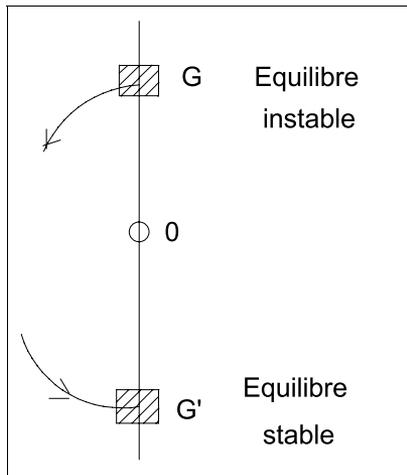


Figure 1.8. Positions d'équilibre.

Un solide mobile autour d'un axe horizontal est en équilibre lorsque son centre de gravité est situé dans le plan vertical passant par l'axe. Généralement, on obtient ainsi deux positions d'équilibre (figure 1.8) :

- une pour laquelle le centre de gravité est situé *au-dessus* de l'axe : l'équilibre correspondant est *instable* ;
- une pour laquelle le centre de gravité est situé *au-dessous* de l'axe : l'équilibre correspondant est *stable*.

1.1.2.3. Théorème des moments

Un solide mobile autour d'un axe est en équilibre quand la somme des moments, pris par rapport à cet axe, des forces qui tendent à le faire tourner dans un sens est égale à la somme des moments des forces qui tendent à le faire tourner en sens contraire.

On trouve une application de ce théorème dans l'équilibre des balances, mais également dans l'équilibre de certaines poutres.

1.1.2.4. Les couples de forces

Comme nous l'avons indiqué ci-dessus au paragraphe 1.1.1.3 *un couple est un ensemble de deux forces parallèles, de sens contraire et de même intensité*. Le plan qui contient les droites d'action des deux forces du couple est appelé *plan du couple*.

Considérons un solide mobile autour d'un axe O (figure 1.9). Appliquons à ce mobile un couple de forces dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation du solide.

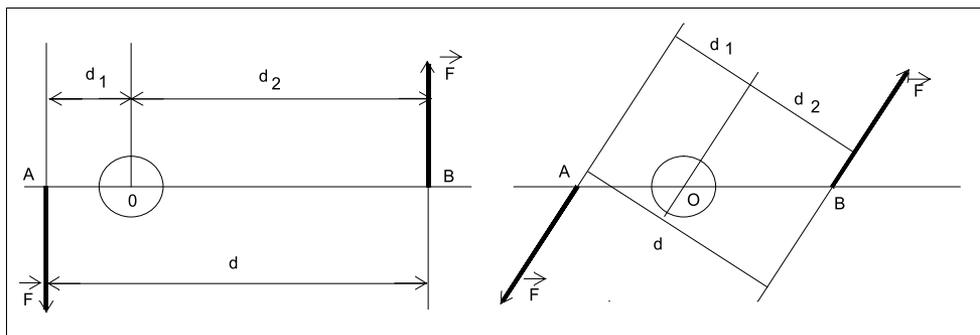


Figure 1.9. Couples de forces.

Diverses expériences montrent que l'effet du couple sur le solide est indépendant de la position des droites d'action des forces du couple par rapport à l'axe de rotation, *pourvu que la distance d de ces droites d'action ne change pas*.

On retrouve aisément ce résultat par le calcul. En effet :

- s'agissant d'un couple, la résultante générale des forces est nulle,
- quant au moment, il est égal à $d_1 \times F + d_2 \times F = (d_1 + d_2) \times F = d \times F$, quelles que soient les valeurs respectives de d_1 ou de d_2 .

On constate donc que le *moment d'un couple* de forces est le produit de la distance des droites d'action des deux forces⁽³⁾ par leur intensité commune.

D'autre part, si l'on fait varier simultanément la force \vec{F} et la distance d , de telle façon que le produit $d \times F$ reste constant, l'effet du couple reste le même ; il en résulte que *la grandeur caractéristique d'un couple est son moment*.

L'unité de moment est le mètre \times Newton (mN).

3. Distance appelée souvent « bras de levier du couple ».

Le moment d'une force est positif si la force est dirigée vers la droite pour un observateur situé au point par rapport auquel est pris le moment, négatif si elle est dirigée vers la gauche⁽⁴⁾.

1.2. ACTIONS ET RÉACTIONS

Considérons une masse ponctuelle quelconque ; celle-ci est en équilibre :

- soit si elle n'est soumise à aucune action (ou force) ;
- soit si la somme des actions (ou forces) qui lui sont appliquées est nulle.

Ainsi, une petite boule placée sur un sol horizontal reste en équilibre parce que le sol exerce sur la petite surface de contact qu'il a avec cette boule une réaction \vec{R} égale et opposée au poids de la boule (schéma de gauche de la figure 1.10).

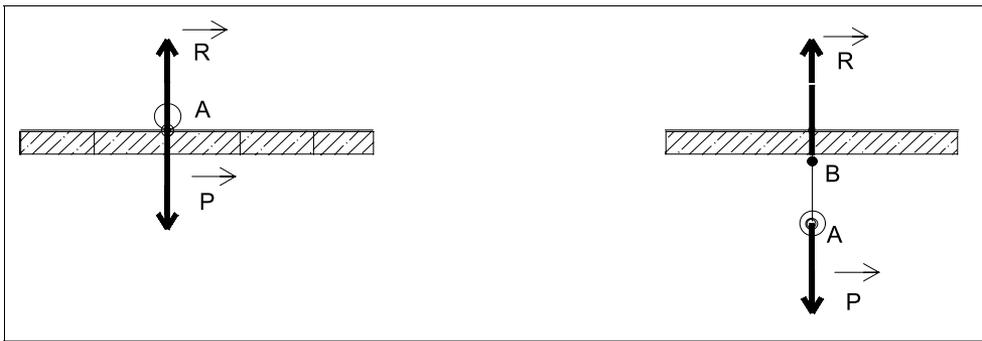


Figure 1.10. Action et réaction.

De même, une boule A attachée en B par un fil, exerce sur le point d'attache B une action dirigée vers le bas, égale au poids \vec{P} de la boule (si l'on néglige le poids du fil). Il y aura équilibre si l'attache B maintient une réaction \vec{R} égale et opposée au poids \vec{P} de la boule (schéma de droite de la figure 1.10).

Remarquez au passage que l'égalité s'établit bien ici entre vecteurs glissants, les origines étant différentes, mais le support étant évidemment le même.

1.3. ÉQUILIBRE D'UN SOLIDE

Si, pour une masse ponctuelle, comme précédemment, toutes les forces appliquées à cette masse peuvent se ramener à une seule force passant par le point représentatif de la masse, et appelée *résultante*, il n'en est pas de même pour un corps solide. En

4. Signalons que le signe ainsi défini pour les moments est, en résistance des matériaux, l'opposé de celui adopté habituellement en mécanique rationnelle.

effet celui-ci est composé d'un grand nombre de masses quasi ponctuelles, à chacune desquelles est appliquée une force unique.

On démontre que l'ensemble de ces forces peut se ramener à :

- une force unique (*résultante générale*);
- et un couple (dont le moment est appelé *moment résultant*).

On démontre également que les conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre d'un solide indéformable⁽⁵⁾ sont exprimées par les deux conditions suivantes :

- la résultante générale des forces (actions et réactions) appliquées à ce solide **est nulle**.
- le moment résultant de toutes ces forces (actions et réactions), pris *par rapport à un point quelconque*, **est nul**.

Dans le cas particulier de forces situées dans un même plan vertical, ces deux conditions s'expriment par trois équations :

- la somme des projections des forces sur un axe horizontal Ox du plan **est nulle**.
- la somme des projections des forces sur axe vertical Oy du plan **est nulle**.
- la somme des moments pris par rapport à un point quelconque du plan **est nulle**.

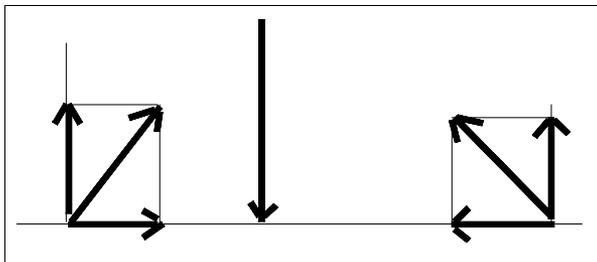


Figure 1.11. Forces en équilibre dans un plan vertical.

Lorsque le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations d'équilibre, le système est *isostatique*. Dans le cas où le nombre d'inconnues est supérieur à ce nombre d'équations, il n'est pas possible de résoudre le problème par les seules équations de la statique : le système est *hyperstatique*⁽⁶⁾.

Remarque

1° Dans le cas où les forces sont toutes horizontales il n'y a plus que deux équations.

2° Il n'y a qu'une seule équation des moments; toutefois il peut être intéressant, pour le calcul, de déterminer l'équilibre des moments successivement par rapport à deux points différents. Il ne s'agit pas alors d'une équation supplémentaire, mais d'une combinaison des équations relatives à l'équilibre des moments et à l'équilibre des forces.

5. La qualité d'indéformabilité du solide est indispensable, tout au moins pendant la durée de l'équilibre considéré, sinon le point d'application des différentes forces se déplacerait et la valeur du moment résultant varierait.

6. Pourtant nous verrons par la suite qu'il est possible de résoudre les problèmes en utilisant la notion de déformation infinitésimale des ouvrages considérés.

3° De la même façon qu'il y a des réactions d'appui, il peut exister des moments d'appui (appelés aussi moments d'encastrement).

Par exemple, dans le cas d'une console encastrée en A dans un mur (figure 1.12), l'équilibre ne peut être obtenu que s'il existe, à la fois :

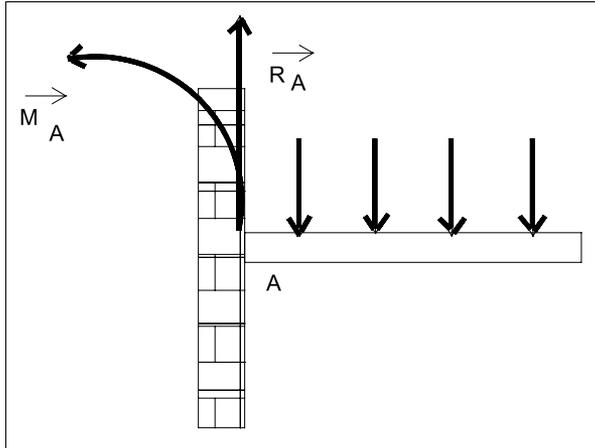


Figure 1.12. Console encastrée dans un mur.

- une réaction \vec{R}_A dirigée vers le haut, s'opposant à la chute de la console ;
- un moment d'encastrement \vec{M}_A , négatif, s'opposant à la rotation de la console vers la droite, sous l'effet des forces qui lui sont appliquées.

1.4. NOTIONS DE STATIQUE GRAPHIQUE : DYNAMIQUES ET FUNICULAIRES

Nous allons examiner une méthode graphique de composition des forces selon plusieurs cas de figure distincts.

Polygone de VARIGNON

Rappelons qu'un tel polygone (appelé aussi *polygone dynamique* ou, plus simplement, *dynamique*) se construit en ajoutant les vecteurs représentatifs des différentes forces, à partir d'un point de départ A.

a) Prenons le cas de forces issues d'un même point :

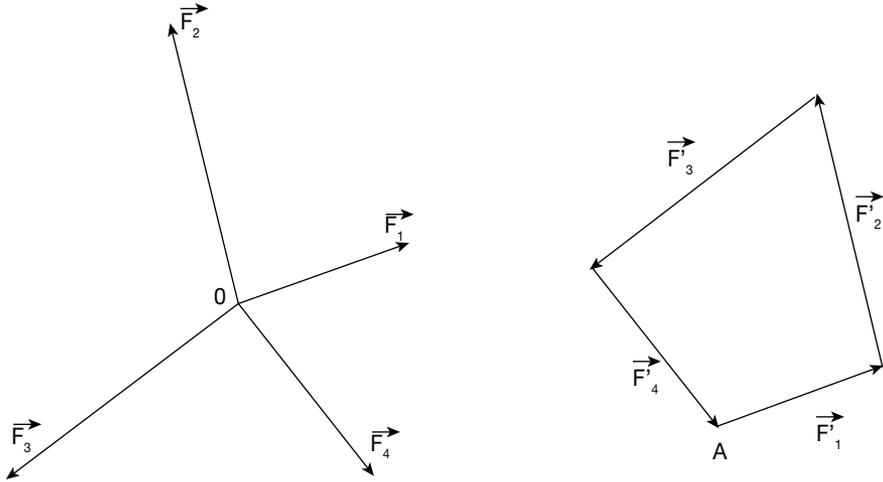


Figure 1.13.

Dans le cas ci-dessus, le dynamique est fermé : la résultante des forces est donc nulle ce qui indique que le système des 4 forces est en équilibre. Nous retrouverons ce cas un peu plus loin dans l'étude des systèmes réticulés plans.

Forces concourantes

En général le système n'est pas en équilibre et les forces admettent une résultante.

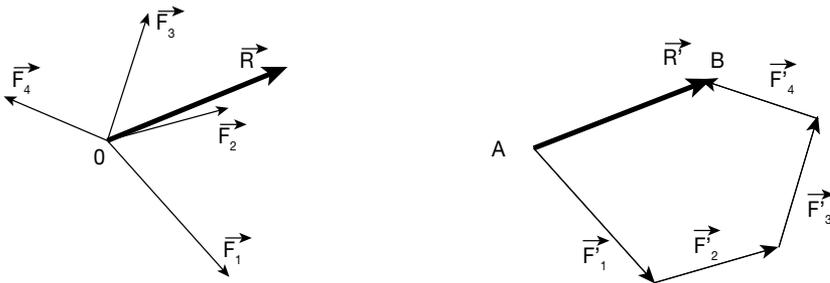


Figure 1.14.

Considérons les 4 forces du dessin de gauche de la figure 1.14 et construisons le dynamique (dessin de droite).

Ce dynamique démarre au point A et se termine au point B : il est donc ouvert, ce qui est normal, puisque les forces admettent une résultante.

Si l'on considère le vecteur qui ferme le dynamique, nous avons alors un système en équilibre et l'on peut écrire :

$$++++ = 0$$

Il en résulte que le vecteur est **égal et opposé** à la résultante des forces.

On a donc =

Forces non concourantes

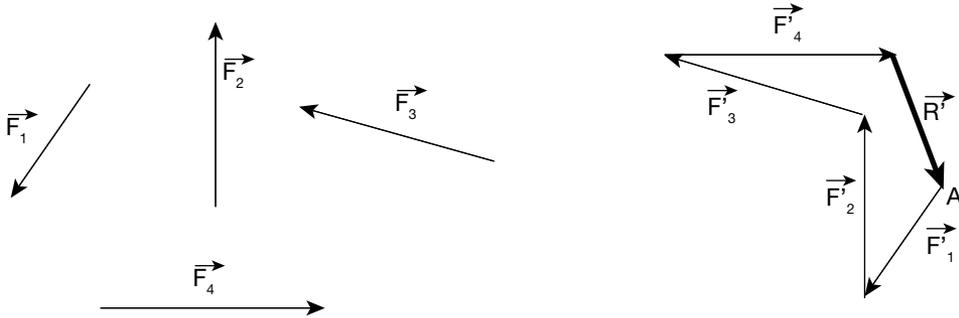


Figure 1.15.

Considérons les quatre forces du dessin de gauche de la figure 1.15.

Le dynamique (dessin de droite) permet de déterminer un vecteur équipollent à la résultante des forces, comme nous l'avons vu précédemment pour les forces concourantes.

Pour autant, on ne connaît pas la position de la droite support de la résultante.

Pour la déterminer, nous allons établir une construction appelée *polygone funiculaire* (du latin *funiculus* : cordelette).

D'un point O quelconque du plan, on joint les extrémités du polygone des forces de la figure 1.15.

On obtient ainsi des segments de droite : Oa_1, Oa_2, \dots, Oa_5 que l'on appelle *rayons vecteurs*.

La figure 1.16 constituée par le dynamique, le pôle O et les rayons vecteurs s'appelle la *figure réciproque*.

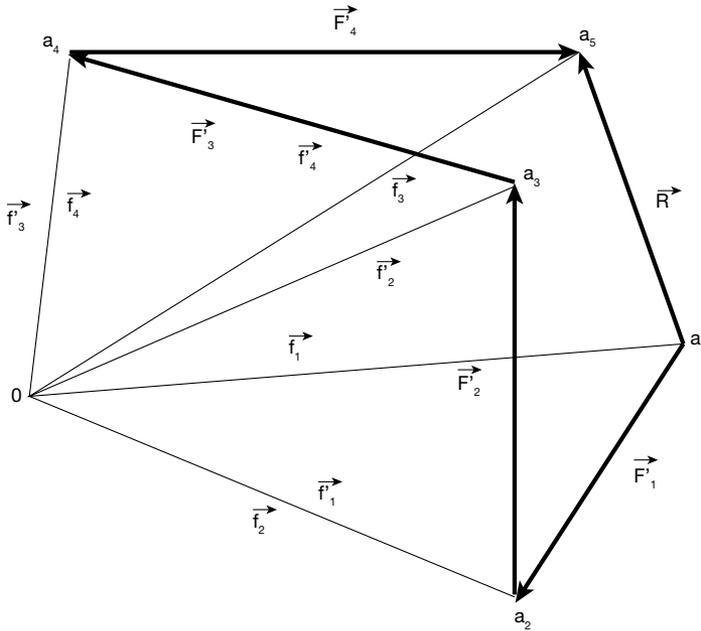


Figure 1.16.

Pour construire le funiculaire, on considère un point quelconque A du plan, à partir duquel on mène une parallèle AA₁ au rayon vecteur Oa₁ que l'on arrête au point A₁ d'intersection avec la droite support de la force.

À partir de A₁, on mène une parallèle A₁ A₂ au rayon vecteur Oa₂ que l'on arrête à son intersection A₂ avec la droite support de la force, et ainsi de suite.

De la même manière qu'il existe une infinité de figures réciproques, puisque le choix du point O est libre, il existe une infinité de funiculaires (et même une double infinité, puisque le choix du point de départ A est aussi libre).

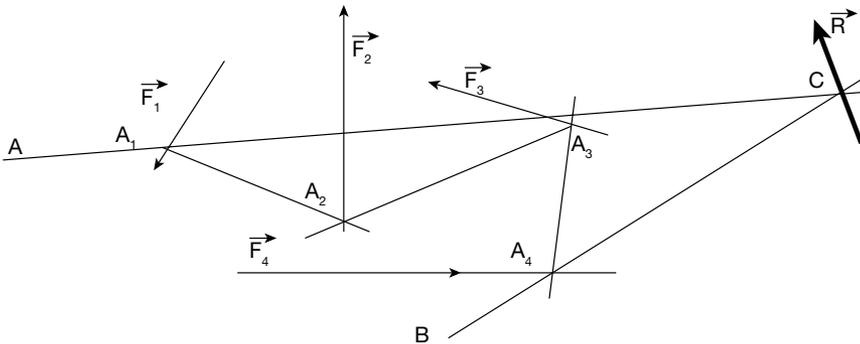


Figure 1.17.

Détermination de la résultante du système de forces

Sur la figure 1.16, la résultante des forces est représentée par le vecteur qui ferme le dynamique. Si nous arrivons à déterminer un point de la droite support, nous aurons déterminé la position de la résultante.

Reprenons la figure réciproque (fig. 1.16) : si nous supposons que les vecteurs et représentent des forces et, nous voyons immédiatement que la résultante de ces deux forces est la force représentée sur le dynamique par le vecteur (fig. 1.18).

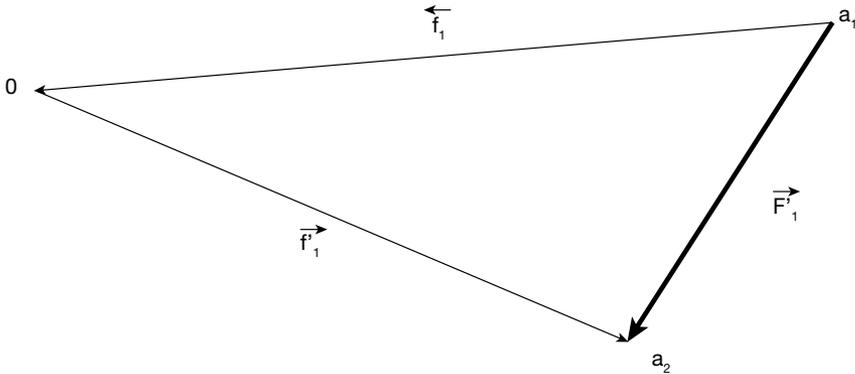


Figure 1.18.

De même pour les forces et, dont la résultante est la force, etc.

Si nous revenons au polygone funiculaire, nous ne changerons pas les conditions d'équilibre du système, si nous remplaçons la force par les deux forces et, l'une portée par le support A A₁ et l'autre par le support A A₂; et ainsi de suite.

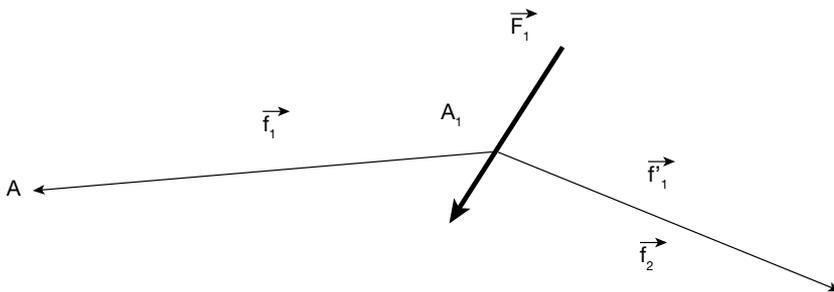


Figure 1.19.

Il y a donc équivalence entre les systèmes de forces :

{, et } et {,,, etc.}

Mais les forces et sont égales (elles ont la même grandeur Oa_2) et opposées. Elles s'annulent donc l'une l'autre, et de même pour les forces et, etc.

Finalement, il ne reste plus sur le funiculaire que 2 forces : et, système équivalent au système des 4 forces initiales {., et}.

On retrouve bien ce résultat en considérant le triangle Oa_1a_5 de la figure réciproque :

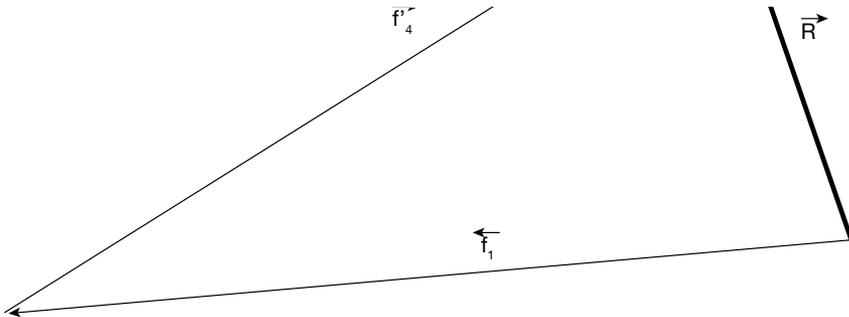


Figure 1.20.

De ce fait, la résultante du système précédent passe par l'intersection des forces et, c'est-à-dire par **le point de concours des côtés extrêmes du funiculaire**.

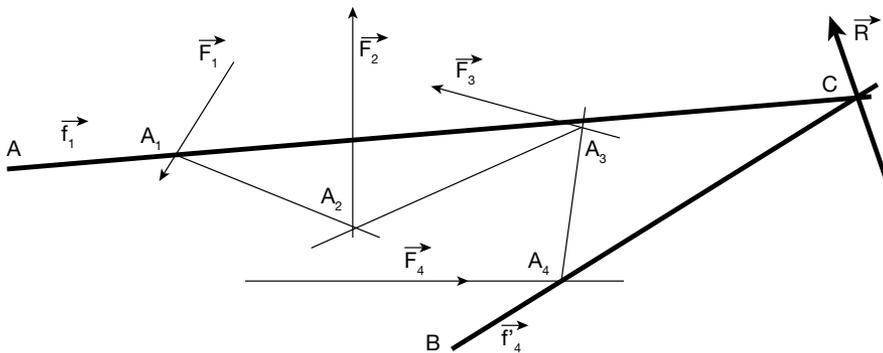


Figure 1.21.

On peut résumer la démonstration précédente de la façon suivante :

Si l'on construit un dynamique, puis un funiculaire d'un système de forces, la résultante de ce système passe par le point d'intersection des côtés extrêmes du funi-

culaire, et elle est égale, parallèle et de même sens que la force représentée par la fermeture du dynamique.

Différents cas de figure sont possibles :

1er cas : le dynamique est ouvert ainsi que le funiculaire : c'est le cas général ; le système admet une résultante.

2ème cas : le dynamique est fermé ainsi que le funiculaire : la résultante est nulle et le système est en équilibre.

3ème cas : le dynamique est fermé et le funiculaire est ouvert.

Nous allons prendre un exemple :

On considère le système de 3 forces ci-dessous :

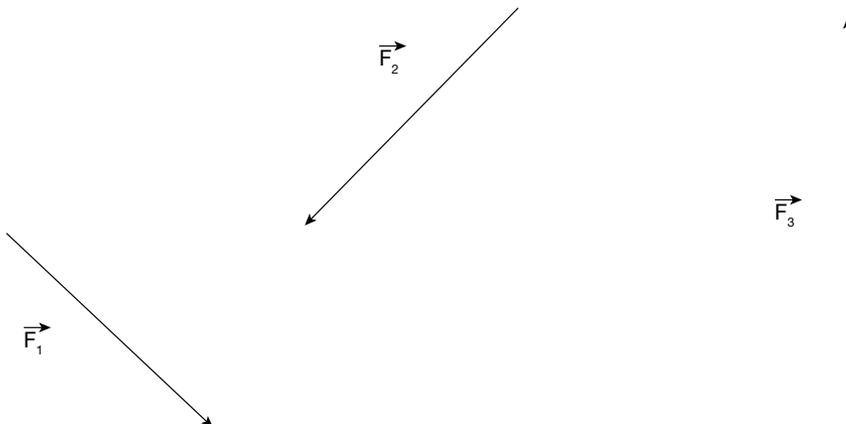


Figure 1.22.

Nous allons construire le dynamique et le funiculaire des ces trois forces.

Tout d'abord, le dynamique.

Nous constatons qu'il est fermé.

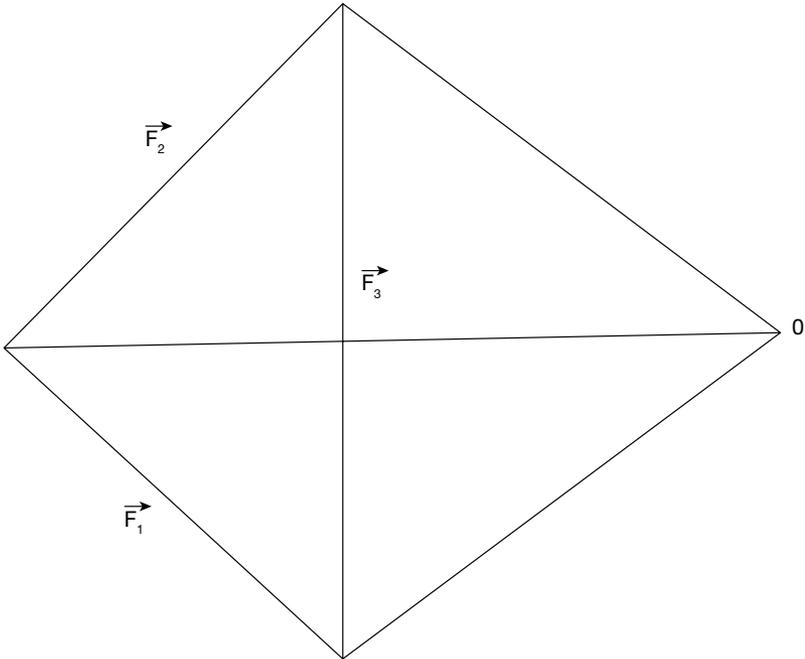


Figure 1.23.

Ensuite, le funiculaire :

Nous constatons que les deux droites extrêmes du funiculaire sont parallèles.

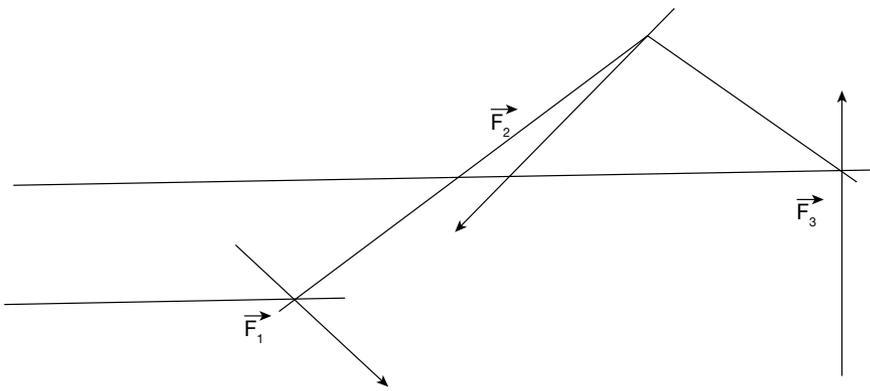


Figure 1.24.

Nous avons donc un système pour lequel la somme des forces est nulle, mais pour lequel le moment résultant n'est pas nul. **Nous avons affaire à un couple.**

Nous pouvons le vérifier rapidement en composant les forces F_1 et F_2 . Nous voyons que leur résultante est une force F_4 égale et opposée à F_3 .

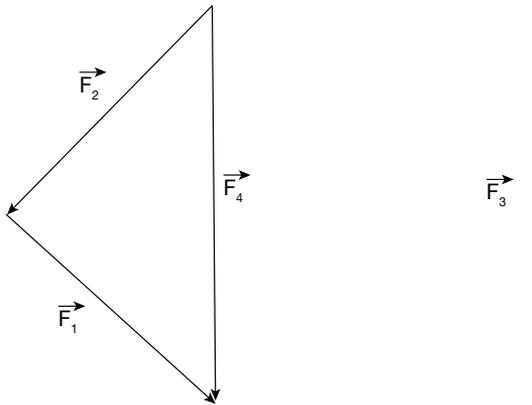


Figure 1.25.

Cas de forces parallèles

La méthode précédente de détermination de la résultante s'applique intégralement, avec une simplification pour le dynamique, car les vecteurs représentant les forces ont même support.

Nous donnerons simplement l'exemple suivant, sans explication supplémentaire.

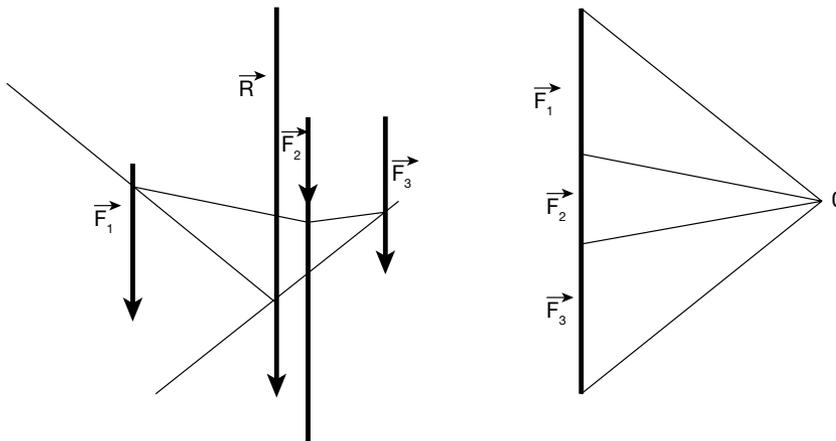


Figure 1.26.

1.5. EXERCICES

1.5.1. POUTRE SUR APPUIS SIMPLES : CALCUL DES RÉACTIONS D'APPUI

➡ Énoncé

Considérons une poutre AB posée sur deux appuis simples disposés sur une même ligne horizontale. On suppose que cette poutre a un poids négligeable, mais qu'elle est soumise à l'action d'une force concentrée au point C et égale à P newtons (figure 1.13, page suivante).

Calculer les réactions d'appui.

➡ Solution

Nous verrons (paragraphe 4.2.2) que les réactions d'appui sont des forces verticales. Il est alors possible de calculer ces réactions d'appui en appliquant les équations de la statique. Elles sont au nombre de deux, aucune des forces n'ayant de composante dirigée selon l'axe horizontal Ox; le nombre d'inconnues étant également de deux : les réactions \vec{R}_A et \vec{R}_B , le système est bien isostatique.

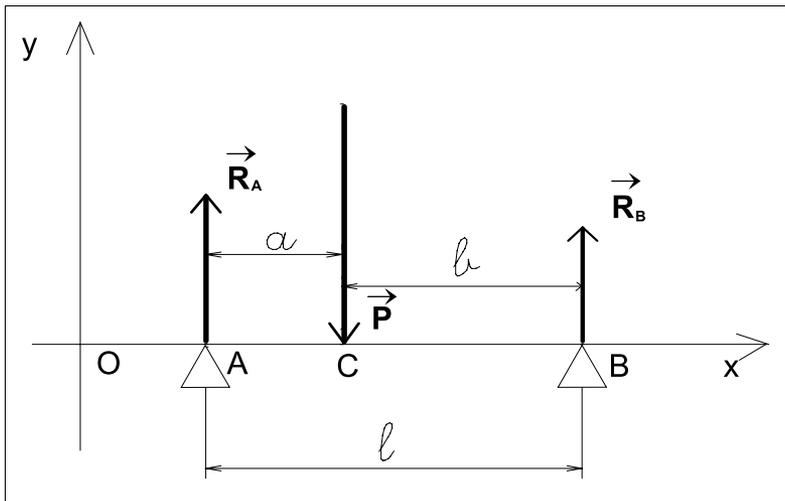


Figure 1.13. Poutre sur appuis simples.

Les deux équations d'équilibre s'écrivent :

1. résultante générale nulle :

$$\vec{R}_A + \vec{R}_B - \vec{P} = 0 \quad (1.3)$$

Dans le cas simple considéré, il est évident, du point de vue physique, que \vec{R}_A et \vec{R}_B sont dirigées vers le haut, dans la mesure où le poids \vec{P} est dirigé vers le bas, mais nous allons le démontrer.

2. moment résultant nul :

ce moment peut être déterminé par rapport à tout point du plan. Toutefois, il est astucieux de le choisir par rapport à un point de passage du support d'une réaction à déterminer : le moment par rapport à un point d'une force passant par ce point étant nul, on se libère de cette inconnue.

Calculons, par exemple, le moment par rapport au point B :

Le moment de la réaction \vec{R}_A vaut $R_A \times \ell$.

Le moment du poids \vec{P} est égal à $-P \times b$ (selon la convention de signe précisée ci-dessus).

Le moment de la réaction \vec{R}_B est nul.

On obtient donc l'équation : $R_A \times \ell - P \times b = 0$.

D'où :

$$R_A = \frac{P \times b}{\ell} \quad (1.4)$$

Ce qui nécessite que R_A soit positif, donc la réaction est dirigée vers le haut.

En reportant dans (1.3), on trouve :

$$R_B = \frac{P \times a}{\ell}$$

ce qui donne une valeur positive, comme prévu.

Remarque

Après avoir trouvé la valeur de R_A , il aurait été possible de calculer R_B en déterminant son moment par rapport à A pour obtenir le même résultat. Il est conseillé d'utiliser cette deuxième méthode et de vérifier ensuite que la résultante générale est nulle. En effet, si l'on s'est trompé dans la première équation, donc sur le calcul de la valeur de R_A , on trouvera forcément une valeur fautive de R_B alors que l'on se croira rassuré par la vérification de l'équation (1.3).

1.5.2. POUTRE AVEC DOUBLE APPUI SIMPLE : CALCUL DES RÉACTIONS D'APPUI

Énoncé

Considérons le système ci-après (figure 1.14), dans lequel B est un appui simple (réaction verticale obligatoirement dirigée vers le haut), A est un double appui simple (réaction verticale, mais pouvant être dirigée indifféremment vers le bas ou vers le haut).

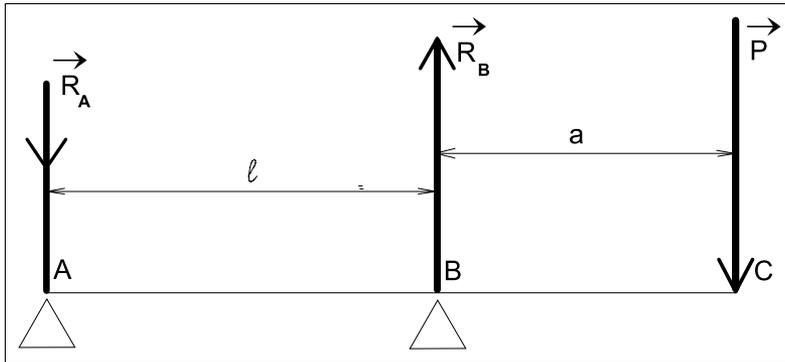


Figure 1.14. Poutre avec double appui simple.

Calculer les réactions d'appui R_A et R_B :

1. dans le cas où $P = -1\ 000\ \text{N}$; $\lambda = 5\ \text{m}$; $a = 3\ \text{m}$
2. dans le cas où $P = -25\ 000\ \text{N}$; $\lambda = 8\ \text{m}$; $a = 4\ \text{m}$

➡ Solution

1. $P = -1\ 000\ \text{N}/R_A = -600\ \text{N}$; $R_B = +1\ 600\ \text{N}$
2. $P = -25\ 000\ \text{N}/R_A = -12\ 500\ \text{N}$; $R_B = +37\ 500\ \text{N}$

2

Moment statique et moment d'inertie d'une surface

2.1. MOMENT STATIQUE

Considérons une surface plane (S) et un axe xx' (figure 2.1). Soit s une petite surface élémentaire à l'intérieur de la surface plane (S).

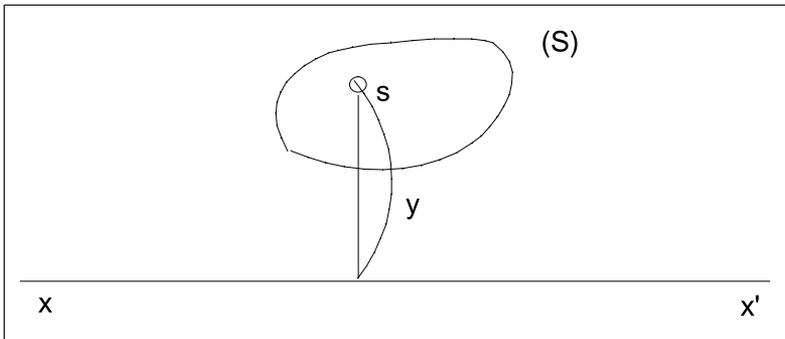


Figure 2.1. Surface élémentaire dans une surface plane.

Le *moment statique* de s par rapport à xx' est défini par le produit $s \cdot y$ de la surface s par sa distance y à l'axe considéré; y doit être affecté d'un signe conventionnel positif (+) ou négatif (–) selon que la surface s est d'un côté ou de l'autre de l'axe xx' .

Par extension, le moment statique de la surface (S) est la somme de tous les moments statiques des surfaces élémentaires, soit :

$$m(S)/xx' = \sum (s \cdot y)$$

Le centre de gravité de la surface est un point G tel que, calculé par rapport à un axe quelconque passant par ce point, le moment statique soit nul.

Si l'axe xx' est un axe passant par G, on obtient :

$$m(S)/xx' = \sum (s \cdot y_0) = 0$$

Remarque

1° Si l'on considère le moment statique par rapport à un autre axe yy' parallèle à l'axe xx' et distant de d de celui-ci (figure 2.2), le moment statique par rapport à l'axe yy' est égal au moment statique par rapport à l'axe xx' augmenté du produit $S \cdot d$ de la surface S par la distance d des deux axes (en faisant attention au signe de d suivant les positions respectives des axes xx' et yy' par rapport à la surface (S)).

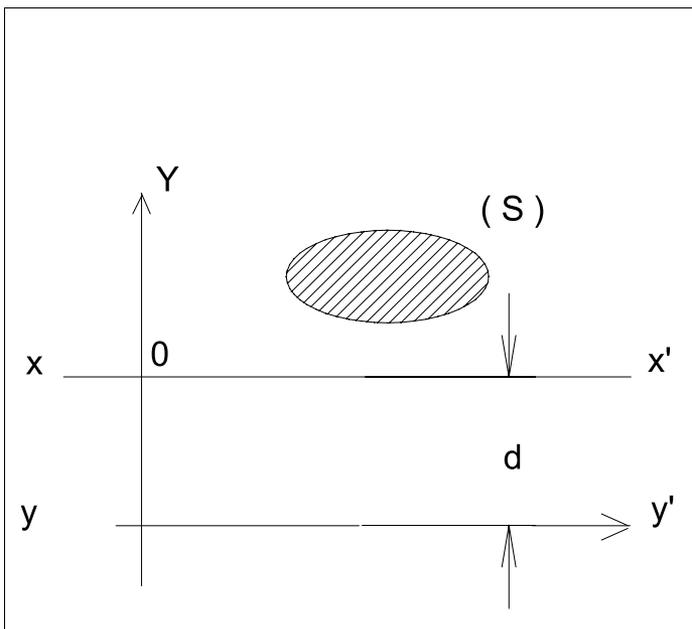


Figure 2.2. Moment statique par rapport à un axe parallèle.

En effet, on a : $\sum (s(y + d)) = \sum (s \cdot y) + \sum (s \cdot d) = \sum (s \cdot y) + d \cdot \sum s = m(S)/xx' + d \cdot S$

Si l'axe initial xx' passe par le centre de gravité G, le moment statique est égal à $d \cdot S$.

2° Le moment statique d'une surface par rapport à un axe de symétrie est nul, puisque cet axe passe par son centre de gravité.

En appliquant les deux remarques précédentes et en tenant compte du signe des moments, on remarque que le moment statique du rectangle par rapport à l'axe xx' est nul, donc le moment statique par rapport à XX' est égal à $b \cdot h \cdot d$ (figure 2.3).

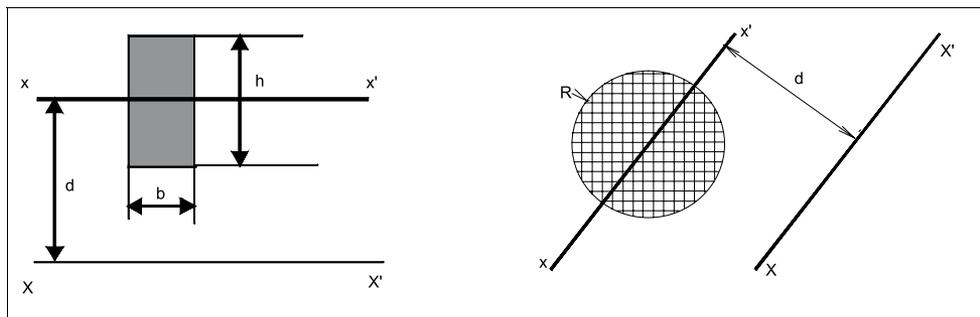


Figure 2.3. Moments cinétiques d'un rectangle et d'un cercle.

De même, le moment statique du cercle par rapport à l'axe XX' est égal à $\pi \cdot R^2 \cdot d$ (figure 2.3).

Le moment statique est homogène à un volume. Il s'exprime donc en cm^3 , mm^3 , etc.

2.2. MOMENT D'INERTIE

Le moment d'inertie d'une surface (S) plane, par rapport à un axe xx' , est la somme des produits des surfaces élémentaires s *infinitement petites*, par le carré de leur distance à cet axe.

Il est possible de se ramener au moment d'inertie pris par rapport à un axe passant par le centre de gravité, à l'aide du théorème suivant (dit théorème de HUYGENS (cf. figure 2.4) :

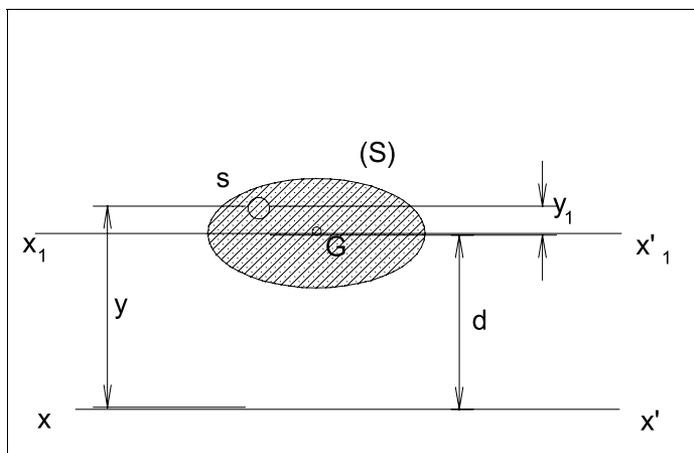


Figure 2.4. Moment d'inertie d'une section par rapport à un axe et par rapport à un axe passant par le centre de gravité.

Le moment d'inertie d'une surface plane par rapport à un axe quelconque situé dans le plan de cette surface est égal au moment d'inertie par rapport à un axe

parallèle passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la grandeur de la surface par le carré de la distance des axes.

$$I_{/xx'} = \sum (y^2 \cdot s); \quad I_{/xx'} = I_{/x_1x'_1} + S \cdot d^2$$

En effet, en appelant y_1 la distance à l'axe $x_1x'_1$ de la surface élémentaire s , on obtient :

$$I_{/xx'} = \sum (y^2 s) = \sum (y_1 + d)^2 s = \sum (y_1^2 s) + 2d \sum (y_1 s) + d^2 \sum s$$

Or : $\sum (y_1^2 s) = I_{/x_1x'_1}$

$\sum (y_1 s) =$ moment statique par rapport à $x_1x'_1 = 0$

$$\sum s = S$$

On a bien : $I_{/xx'} = I_{/x_1x'_1} + Sd^2$

Le moment d'inertie est homogène à une longueur à la puissance quatre. Il s'exprime donc en cm^4 , mm^4 , etc.

2.3. MODULE D'INERTIE

Le **module d'inertie** est défini comme étant le quotient du moment d'inertie par la distance de la fibre extrême à l'axe passant par le centre de gravité (figure 2.5).

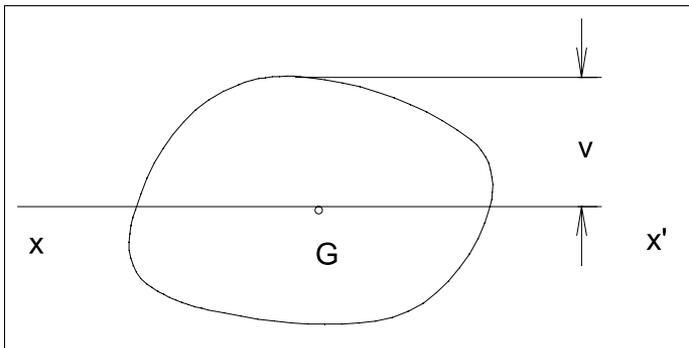


Figure 2.5. Fibre extrême.

Soit v cette distance, le module d'inertie est alors I/v .

Il est également appelé module de résistance, puisqu'il intervient dans le calcul des contraintes dans les pièces fléchies (cf. § 5.2.1).

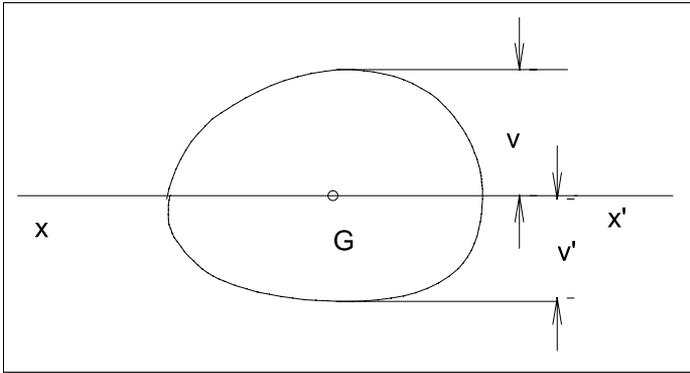


Figure 2.6. Fibres extrêmes dans une section dissymétrique.

Il n'existe évidemment qu'un seul module d'inertie pour une section symétrique, mais il y en a deux pour une section dissymétrique : I/v et I/v' correspondant aux deux fibres extrêmes (figure 2.6).

Un module d'inertie est homogène à une longueur à la puissance trois. Il s'exprime donc, comme un volume, en cm^3 , mm^3 , etc.

2.4. TABLEAU DES DIFFÉRENTS MOMENTS ET MODULES POUR LES FIGURES SIMPLES

Figures	Moment statique	Moment d'inertie	Module d'inertie
	nul	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$
	$\frac{bh^2}{2}$	$\frac{bh^3}{3}$	$\frac{bh^2}{3}$

Tableau 2.1. Les différents moments et modules pour les figures simples.

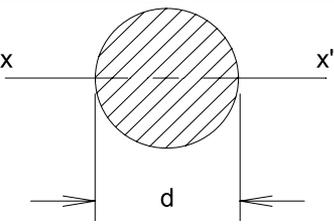
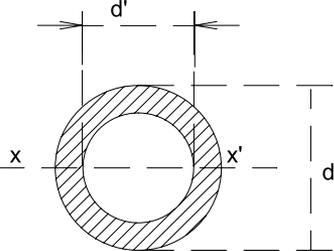
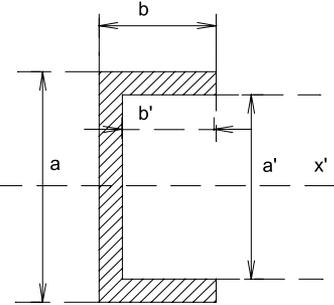
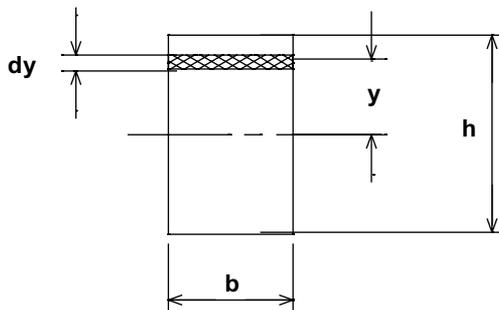
Figures	Moment statique	Moment d'inertie	Module d'inertie
	nul	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^3}{32}$
	nul	$\frac{\pi(d^4 - d'^4)}{64}$	$\frac{\pi(d^4 - d'^4)}{32d}$
	nul	$\frac{ba^3 - b'a'^3}{12}$	$\frac{ba^3 - b'a'^3}{6a}$

Tableau 2.2. Les différents moments et modules pour les figures simples (suite).

Calcul des moments d'inertie du rectangle et du cercle :

A – Rectangle :

1 – Calcul par rapport à l'axe de symétrie horizontal



Pour le calcul direct, on considère un petit rectangle élémentaire de largeur b et d'épaisseur dy , situé à la distance y de l'axe de symétrie horizontal

Par définition, le moment d'inertie est égal à
$$\int_{-h/2}^{+h/2} by^2 dy = \frac{by^{3+h/2}}{3^{-h/2}} = \frac{2bh^3}{24} = \frac{bh^3}{12}$$

Calculons le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par la base inférieure :

$$I = \int_0^h by^2 dy = \frac{bh^3}{3}$$

On peut passer d'un résultat à l'autre par le théorème de Huygens.

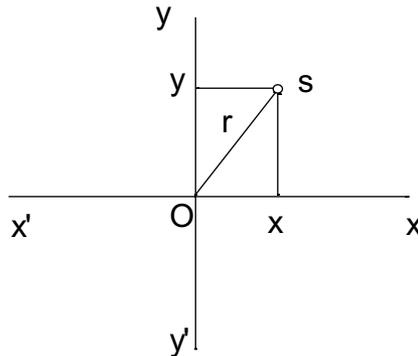
Par exemple, le moment d'inertie par rapport à la base est égal au moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le centre de gravité augmenté du produit $S d^2$ où

$$S = bh \text{ et } d = h/2 \text{ d'où } Sd^2 = \frac{bh^3}{4} \text{ et } I_{base} = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

On retrouve bien le résultat obtenu par le calcul direct.

B - Cercle

Pour calculer facilement le moment d'inertie d'un cercle par rapport à un diamètre, il faut d'abord calculer le moment d'inertie polaire de ce cercle.



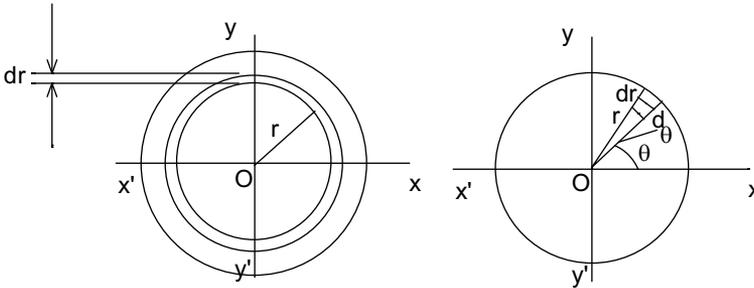
Si l'on considère une petite surface élémentaire s , située à la distance r d'un point O , le moment d'inertie polaire de cette surface par rapport à O est r^2s .

Le moment d'inertie de la surface s par rapport à $x'x$ est égal à $y^2 \cdot s$ et le moment d'inertie de cette surface par rapport à $y'y$ est égal à $x^2 \cdot s$.

Comme $r^2 = x^2 + y^2$, on voit que le moment d'inertie polaire est égal à la somme du moment d'inertie par rapport à $x'x$ et du moment d'inertie par rapport à $y'y$.

Compte tenu des symétries du cercle, il est évident que le moment d'inertie d'un cercle par rapport à un diamètre est égal au moment d'inertie pris par rapport à un diamètre perpendiculaire. Il en résulte que le moment d'inertie polaire est égal à deux fois le moment d'inertie par rapport à un diamètre.

Le moment d'inertie polaire d'un cercle peut se calculer selon l'une ou l'autre méthode ci-après :



1^{re} méthode :

On considère un anneau d'épaisseur dr , située à la distance r du centre O .

La surface de cet anneau est égale à $2\pi r dr$ et le moment d'inertie polaire est égal à $2\pi r^3 dr$

En intégrant de $r = 0$ à $r = R$, on trouve le moment d'inertie polaire du cercle

$$= 2\pi \times \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

Le moment d'inertie par rapport à un diamètre est égal à la moitié du moment d'inertie polaire : $\frac{\pi R^4}{4}$

2^e méthode :

On considère une surface élémentaire à l'intérieur d'un secteur élémentaire du cercle d'angle $d\theta$.

La surface élémentaire a pour aire $dr \times r d\theta$ et son moment d'inertie polaire est égal à $r^3 dr d\theta$.

Le moment d'inertie polaire est donc l'intégrale double :

$$\iint r^3 dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = 2\pi \times \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

2.5. EXERCICES

2.5.1. CALCUL DU MOMENT ET MODULE D'INERTIE D'UN RECTANGLE ÉVIDÉ

➡ Énoncé

Calculer le moment d'inertie et le module d'inertie par rapport à l'axe de symétrie xx' , du rectangle évidé défini par la figure 2.7, page ci-contre.

➡ Solution

Ce moment d'inertie est égal au moment d'inertie du grand rectangle, diminué du moment d'inertie du rectangle intérieur, soit :

$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{b'h'^3}{12}$$

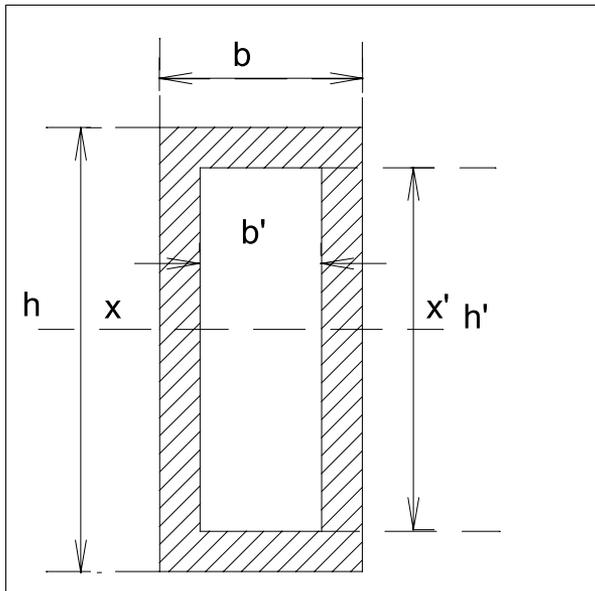


Figure 2.7.

Quant au module d'inertie, il est égal au quotient du moment d'inertie par la plus grande distance à l'axe xx' , soit $h/2$:

$$\frac{I}{v} = \frac{bh^3 - b'h'^3}{6h}$$

2.5.2. CALCUL DU MOMENT ET MODULE D'INERTIE D'UNE CORNIÈRE

➡ Énoncé

Calculer le moment d'inertie et le module d'inertie de la cornière (figure 2.8, page suivante) par rapport à l'axe xx' .

Donner ces valeurs si l'axe xx' passe par le centre de gravité de la cornière. Le calcul sera effectué avec $l = 100$ mm et $e = 10$ mm.

➡ Solution

Dans un cas général, on calcule le moment d'inertie des rectangles circonscrits, puis on déduit les moments d'inertie des rectangles vides :

$$I = \frac{ev^3 + lv'^3 - (l - e)(v' - e)^3}{3}$$

et le module d'inertie est égal à I/v , puisque $v > v'$.

Cas où l'axe xx' passe par le centre de gravité G.

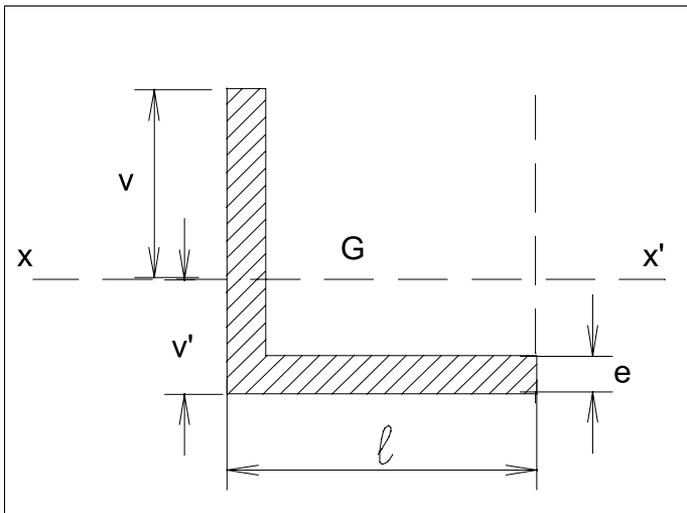


Figure 2.8.

Calculons d'abord la position de G : la droite D parallèle à l'axe xx' passant par le centre de gravité G découpe la cornière en deux parties dont les moments statiques doivent être égaux en valeur absolue, soit :

$$\frac{ev^2}{2} = \frac{ev'^2}{2} + (l - e) \cdot e \cdot (v' - \frac{e}{2})$$

Cette relation permet de calculer la distance v en fonction de la distance v' , et donc v et v' en fonction de la largeur ℓ , puisque $v + v' = \ell$.

Donc : $5v^2 = 5v'^2 + 90 \times 10(v' - 5)$, soit $(v + v')(v - v') = 180v' - 900$, soit, avec $v + v' = 100 \rightarrow v = 2,8v' - 9$

Combiné avec $v + v' = 100$, on obtient $v' = 28,684$ mm et $v = 71,316$ mm.

La valeur du moment d'inertie est donc :

$$I = + \frac{10(71,316)^3 + 100(28,684)^3 - 90(18,684)^3}{3}$$

$$= + \frac{3\,627\,112 + 2\,360\,091 - 587\,019}{3} = 1\,800\,061 \text{ mm}^4$$

Il est possible de faire une vérification en calculant le moment d'inertie par rapport à la face supérieure de l'aile basse de la cornière, c'est-à-dire :

$$I = 10 \cdot 90^3/3 + 100 \cdot 10^3/3 = 2\,463\,333 \text{ mm}^4$$

Pour obtenir le moment d'inertie par rapport au centre de gravité il faut soustraire de la valeur calculée le produit Sd^2 où $S = 10\,000 - 8\,100 = 1\,900 \text{ mm}^2$ et $d = 28,684 - 10 = 18,684$ mm, soit une valeur de $663\,275 \text{ mm}^4$. Ainsi on obtient $I = 2\,463\,333 - 663\,275 = 1\,800\,058 \text{ mm}^4$.

Le calcul vérifie le calcul précédent, aux arrondis près.

2.5.3. CALCUL DU MOMENT ET MODULE D'INERTIE D'UN FER EN TÉ

➡ Énoncé

Même question pour le fer en té (figure 2.9), avec $b = 100$ mm; $h = 50$ mm et $e = 10$ mm.

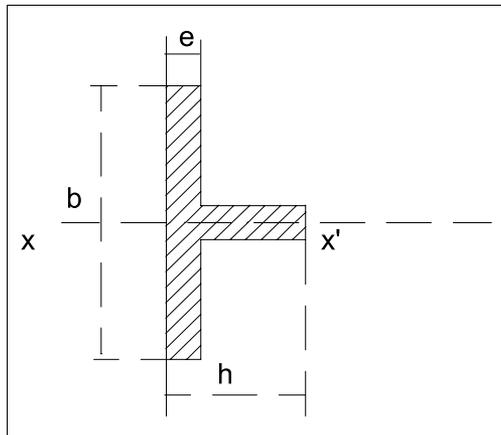


Figure 2.9.

➡ Solution

$$I = \frac{eb^3 + (h - e)e^3}{12} \text{ et } \frac{I}{v} = \frac{eb^3 + (h - e)e^3}{6b}$$

soit, avec les données numériques : $I = 836\,666,66 \text{ mm}^4$ et $I/v = 16\,733,33 \text{ mm}^3$.

3

Généralités sur la résistance des matériaux

3.1. BUT DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

La résistance des matériaux a pour objectif de donner à l'auteur d'un projet tous les éléments nécessaires pour réaliser une construction stable.

C'est une science qui s'appuie sur la mécanique rationnelle, en particulier la statique ; mais si la statique ne considère que les actions extérieures appliquées aux systèmes étudiés, la résistance des matériaux, au contraire, pénètre à l'intérieur des systèmes, pour étudier les forces appliquées à chaque élément de la matière, et donc les déformations qui en résultent. En effet, aucun solide n'est strictement indéformable : sans parler de la dilatation des corps lors d'une augmentation de température, le lecteur a en mémoire la planche qui plie sous une charge, le fil qui s'allonge sous un effort de traction, etc.

Toutefois, si la charge ne dépasse pas une certaine limite, la planche qui plie, le fil qui s'allonge, ne se rompent pas, car il s'établit à la fois un équilibre extérieur (déterminé par la statique) et un équilibre intérieur des liaisons entre éléments du corps solide (déterminé par la résistance des matériaux).

Cet équilibre intérieur amène à définir la notion de *contrainte*.

3.2. NOTION DE CONTRAINTE

Considérons un solide quelconque en équilibre sous l'action de forces extérieures.

En général, ces forces comprennent :

- des forces de volume (forces de pesanteur, forces d'inertie) appliquées à chaque élément de volume du corps,

- des forces de surface (pression d'un fluide, poussée d'un remblai, charge supportée par une poutre) appliquées à la surface du corps.

Si le corps est en équilibre, le système des forces de volume et des forces de surface est équivalent à zéro.

Imaginons une surface Σ (un plan, par exemple) qui décompose le corps en deux parties (A) et (B). La partie (B) est en équilibre sous l'action des forces extérieures (de volume et de surface) qui lui sont directement appliquées et des réactions exercées par la partie (A) sur la partie (B). Nous admettrons que l'action exercée par la partie (A) sur la partie (B) est la suivante : sur chaque élément s de la surface de séparation (Σ), (A) exerce sur (B) une force dite *force élastique* $\vec{f}_s \times s$ appliquée au centre de l'élément s . Par définition, \vec{f} est le **vecteur contrainte** relatif à l'élément de surface s .

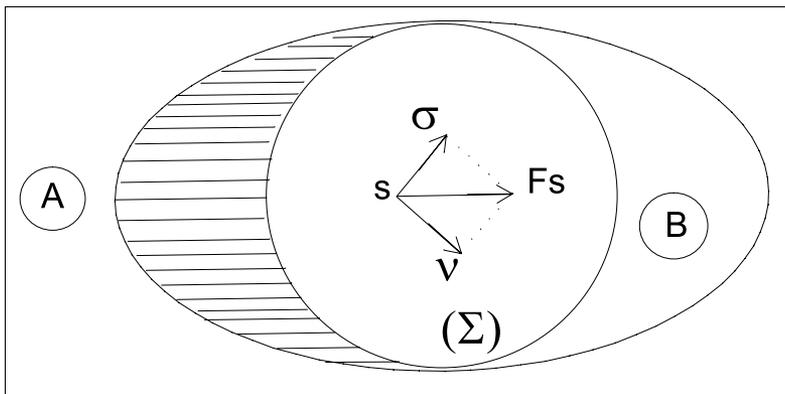


Figure 3.1. Forces élastiques internes.

- Le vecteur \vec{f} , dont la direction est quelconque dans l'espace, peut être décomposé :
- en sa projection sur la normale à l'élément s ; cette projection σ est la *contrainte normale* ou pression. Elle peut être une *compression* ou une *traction*, suivant que les parties (A) et (B) sont pressées ou non l'une vers l'autre à travers l'élément de surface s ; (par tradition, la mesure algébrique σ du vecteur σ est positive dans le cas d'une compression, négative dans le cas d'une traction),
 - en sa projection ν sur le plan tangent à l'élément s , appelée *contrainte tangentielle*.

L'ensemble des forces \vec{f}_s appliquées à la surface Σ forme un système équivalent au système des forces extérieures directement appliquées à la partie (A). En effet, l'un et l'autre de ces systèmes ajouté au système de forces extérieures appliquées à la partie (B) forme un système équivalent à zéro.

On peut trouver une infinité de systèmes de forces \vec{f}_s équivalents au système des forces extérieures appliquées à (A). Comme indiqué au paragraphe 3.1, la statique ne permet pas de déterminer ces systèmes et il faut donc faire appel à d'autres

hypothèses résultant de l'étude expérimentale de la déformation des corps naturels sous l'action des forces qui leur sont appliquées.

La dimension d'une contrainte est celle d'une force divisée par une surface. L'unité est donc l'unité de pression, soit le Pascal (Pa) ou ses multiples, notamment le Méga-Pascal (MPa) ou éventuellement le *bar* qui correspond à 10^5 Pa (*cf.* Introduction).

3.3. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE LA RELATION ENTRE CONTRAINTES ET DÉFORMATIONS

Nous considérerons seulement l'essai classique de traction d'une éprouvette en acier *doux* (figure 3.2).

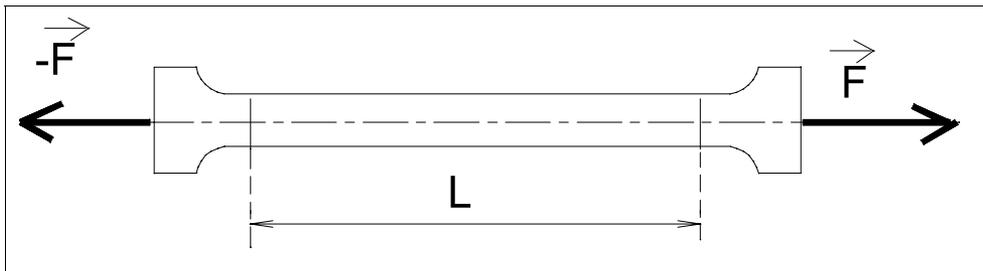


Figure 3.2. Éprouvette d'essai de traction.

L'éprouvette est un cylindre de section circulaire, muni de deux têtes insérées entre les mâchoires de la machine d'essai de traction.

Lorsque l'on exerce un effort de traction \vec{F} sur l'éprouvette, on produit sur la partie centrale de l'éprouvette un champ de contraintes de traction simple considéré uniforme.

La contrainte de l'élément de surface unité est donc une contrainte normale de valeur :

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{F}}{S}$$

S désigne la section *initiale* de l'éprouvette.

À l'aide de comparateurs on mesure l'allongement ΔL de la partie centrale de l'éprouvette. Par la suite, on considère plus particulièrement l'allongement relatif :

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

En reportant sur un graphique les résultats de l'essai, on trouve, pour l'acier doux, une courbe (figure 3.3).

L'abscisse représente l'allongement relatif ϵ , l'ordonnée la contrainte normale σ .

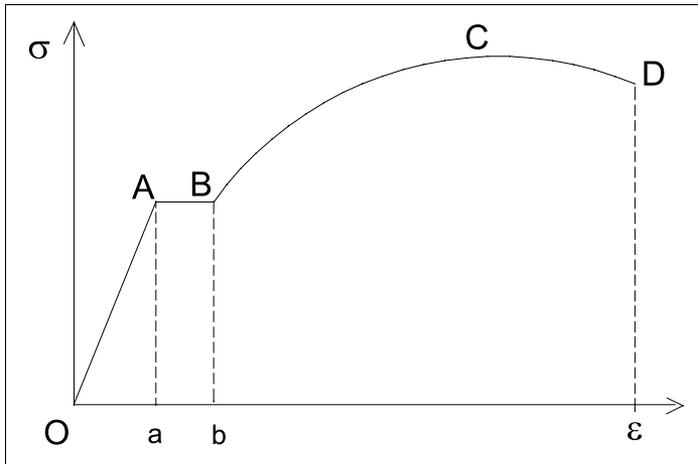


Figure 3.3. Diagramme d'essai de traction.

Cette courbe comprend d'abord une partie rectiligne OA ; l'ordonnée du point A est appelée *limite élastique*, notée σ'_e . La valeur de σ'_e est de l'ordre de 240 MPa pour l'acier doux. Tant que la contrainte est inférieure à cette valeur, c'est-à-dire tant que l'on se trouve sur le segment OA de la courbe, l'allongement est proportionnel à la contrainte.

En outre, le phénomène est réversible : si l'effort de traction diminue, on reste sur la droite OA. Lorsque l'effort de traction est supprimé, on revient au point origine O. Le système est parfaitement élastique.

Concrètement, sous la contrainte σ le matériau se déforme. L'arrêt d'application de cette même contrainte permet au matériau de reprendre sa forme d'origine.

La partie rectiligne OA permet donc d'écrire :

$$\epsilon = \frac{-\sigma}{E}$$

Cette relation est la **loi de Hooke**.

Le signe moins est dû à la convention ci-avant donnée, c'est-à-dire considérer les compressions comme positives et les tractions comme négatives.

E est la pente de la droite OA. On l'appelle **module d'élasticité longitudinal** ou **module de Young**. Ses dimensions sont celles d'une contrainte puisque ϵ est un nombre sans dimension.

Signalons que l'allongement de la tige produit par l'effet de traction, s'accompagne corrélativement d'un rétrécissement de la section (sensible conservation du volume). La mesure de la variation relative du diamètre Φ (dans le cas étudié) est telle que :

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = -\nu \frac{\Delta L}{L} = -\nu \epsilon$$

où ν est un coefficient sans dimension, appelé **coefficient de Poisson**.

À partir du module d'élasticité E et du coefficient de Poisson ν , est défini un autre module ayant la dimension d'une contrainte :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Ce module apparaît dans le calcul des contraintes de cisaillement. Il est appelé **module d'élasticité transversal**.

La partie OA de la courbe de traction définit le *domaine élastique* de traction ; des essais de compression montrent l'existence d'un domaine élastique de compression. Dans le cas de l'acier, le module d'élasticité E et le coefficient de Poisson ν ont les mêmes valeurs en compression qu'en traction.

Remarque

En considérant un système de contraintes non plus parallèles mais quelconques, on vérifie que les contraintes sont aussi proportionnelles aux déformations, mais celles-ci intervenant selon leurs différentes composantes dans trois directions orthogonales : c'est la *loi de Hooke généralisée*.

Matériaux	ν	E (en MPa)
Acier doux	0,25 à 0,30	200 000 à 220 000
Acier Invar	0,25 à 0,30	140 000
Aluminium	0,34	70 000
Laiton	0,33	92 000
Bronze	0,31	106 000
Verre	0,25	66 000
Plexiglas	0,30	2 900

Tableau 3.1. Valeurs de E et de ν pour différents matériaux.

Les nombres donnés ci-dessus montrent la valeur élevée du module de Young de l'acier et donc sa valeur constructive supérieure à celle des autres matériaux.

Sur la figure 3.3, page précédente, au-delà du point A se situe la zone des déformations non réversibles, donc permanentes. La courbe présente d'abord un palier AB,

l'éprouvette s'allongeant sans que l'effort ne change sensiblement de valeur. AB caractérise le *domaine plastique* (pour l'acier doux l'allongement plastique O_b est environ vingt fois plus grand que l'allongement élastique O_a).

Au-delà de la période élastique OA, un faible accroissement de la contrainte donne un allongement important, la courbe se relevant jusqu'à un maximum C correspondant à la *limite de rupture*.

À ce stade apparaît le phénomène de la *striction* : la déformation de l'éprouvette n'est plus homogène; elle se concentre au voisinage d'une section sensiblement centrale dont l'aire diminue rapidement (figure 3.4). Le point figuratif décrit alors la partie descendante CD de la courbe, jusqu'à la rupture de l'éprouvette.

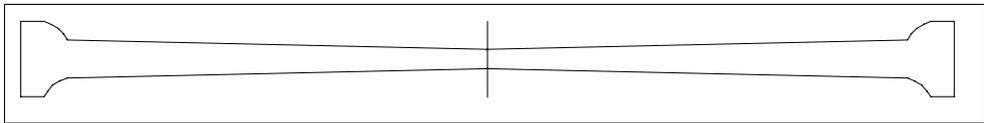


Figure 3.4. *Striction de l'éprouvette.*

La partie descendante n'est d'ailleurs observée que parce que le calcul de la contrainte est effectué en considérant la section initiale de l'éprouvette; si le calcul de la contrainte était réalisé sur la section réelle de l'éprouvette, la courbe resterait ascendante jusqu'à la rupture.

L'allongement total à la rupture est de l'ordre de 25%; c'est plus de 200 fois l'allongement élastique.

Pendant longtemps, les calculs de résistance des matériaux ont été effectués en ne considérant que la phase élastique des matériaux utilisés : c'est encore le cas lorsque l'on considère ce que l'on appelle les *sollicitations de service* correspondant à l'*état-limite de service*. Mais l'examen de la courbe de traction (figure 3.3, page 30) montre l'importance pratique des déformations plastiques, la matière pouvant s'écouler sans destruction dans cette phase, avec une contrainte ne dépassant pas la limite élastique; c'est ce que l'on appelle le *phénomène de l'adaptation* : les zones les moins fatiguées viennent au secours des zones les plus sollicitées.

C'est pourquoi plusieurs règles de calculs actuelles (notamment pour le béton armé et le béton précontraint) sont fondées sur la notion de *calcul à la rupture* selon le principe suivant :

Ayant défini les phénomènes que l'on veut éviter, ayant estimé la gravité des risques liés à ces phénomènes, on choisit pour la construction des dispositions telles que la probabilité de chacun de ces phénomènes soit limitée à une valeur assez faible pour être acceptable en fonction de cette estimation. C'est ainsi, par exemple, que certaines *pondérations* des charges et surcharges sont imposées, mais qu'en revanche la contrainte admissible est relevée au voisinage de la contrainte élastique, ou du moins avec un faible coefficient de sécurité.

3.4. CONTRAINTES ADMISSIBLES

- NOTION DE COEFFICIENT DE SÉCURITÉ

Les considérations précédentes amènent à définir des contraintes maximales à ne pas dépasser, de façon à ne pas entraîner la ruine des constructions ou parfois même de façon à limiter les déformations (flexions de poutre, par exemple) pour des raisons esthétiques alors que la sécurité n'est pas en jeu.

La règle de base est de ne pas dépasser la limite élastique des matériaux utilisés, et même de se placer sensiblement en dessous, en utilisant des **coefficients de sécurité**.

Les principales raisons motivant l'introduction de coefficients de sécurité sont les suivantes :

1. les caractéristiques des matériaux ne sont connues qu'avec une certaine *dispersion*⁽¹⁾. Cette dispersion peut être assez forte dans certains cas, comme, par exemple, la résistance à la compression des bétons,
2. les sollicitations auxquelles sont soumises les constructions ne sont pas toujours connues avec précision (par exemple, les efforts exercés par le vent),
3. les matériaux utilisés dans les constructions ne représentent pas exactement des images fidèles des éprouvettes sur lesquelles ont été mesurées les caractéristiques mécaniques des matériaux,
4. les matériaux peuvent s'altérer au cours du temps, ce qui peut modifier les caractéristiques intrinsèques choisies dans les calculs, etc.

Les coefficients de sécurité varient suivant les règlements et suivant la nature envisagée pour les sollicitations (état-limite ultime ou état-limite de service).

Enfin il y a lieu de signaler que certaines incertitudes, concernant notamment les surcharges pouvant être appliquées aux constructions, sont non seulement couvertes par les coefficients de sécurité mais aussi par l'introduction de *coefficients de pondération* dans le calcul des sollicitations auxquelles sont soumis les différents éléments d'une construction. Nous ne nous attarderons pas davantage sur ce sujet dans le présent ouvrage, laissant au lecteur curieux le soin de consulter les règlements particuliers (BAEL pour le béton armé, BPEL pour le béton précontraint, etc.).

1. Lorsque l'on effectue des mesures expérimentales sur des matériaux, les résultats peuvent être assez différents et sont *dispersés* autour d'une valeur moyenne. Compte tenu de ce risque de dispersion, les règles de calculs imposent des coefficients de sécurité, parfois importants.

3.5. EXERCICES

➡ Énoncé 1

Considérons une éprouvette d'acier doux de 200 mm de longueur sur laquelle on applique un effort de traction. Une courbe de la forme indiquée à la figure 3.3, page 30, est ainsi obtenue.

Les coordonnées des différents points de la courbe sont :

$$\begin{array}{llll} \text{A : } \epsilon = 0,12 \% & \text{B : } \epsilon = 2,4 \% & \text{C : } \epsilon = 19 \% & \text{D : } \epsilon = 25 \% \\ \sigma = 240 \text{ MPa} & \sigma = 240 \text{ MPa} & \sigma = 420 \text{ MPa} & \sigma = 380 \text{ MPa} \end{array}$$

1. Indiquez la valeur de la limite élastique (en MPa) ainsi que celle du module de Young.
2. Quelle est la limite de rupture ? Donnez l'allongement de rupture en centimètres.

➡ Solution

1. La limite élastique est l'ordonnée du point A, soit 240 MPa. Le module de Young est donné par la pente de OA par rapport à l'axe des abscisses, soit :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{240}{0,0012} = 200\,000 \text{ MPa.}$$

2. La limite de rupture est l'ordonnée du point C : 420 MPa. En revanche, l'allongement de rupture est l'abscisse du point D, soit 25 %, ce qui correspond à un allongement effectif de :

$$\frac{20 \times 25}{100} = 5 \text{ cm.}$$

➡ Énoncé 2

Considérant la barre de l'exercice précédent, supposée cylindrique de section circulaire de diamètre 12 mm, calculez le rétrécissement du diamètre si la force appliquée à l'éprouvette est de 22 600 N. Le coefficient de Poisson sera pris égal à 0,30.

➡ Solution

La section de la barre est égale à 113 mm^2 , soit $113 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$.

La valeur de la contrainte est ainsi de :

$$\frac{22\,600}{113 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 200 \text{ MPa}$$

La déformation se situe dans le domaine élastique puisque la contrainte est inférieure à la limite élastique de 240 MPa. L'allongement longitudinal est égal à $200/200\,000 = 1/1\,000$ et le rétrécissement transversal à $0,30/1\,000$, soit 3,6 microns.

Les poutres

4

4.1. DÉFINITION D'UNE POUTRE

Nous ne considérerons dans cet ouvrage que les poutres dites à *plan moyen*, c'est-à-dire admettant un plan de symétrie dans le sens de leur longueur.

En général une **poutre** est : un solide engendré par une aire **plane** (Σ) dont le centre de gravité G décrit une courbe **plane** (Γ), le plan de l'aire (Σ) restant normal à la courbe (Γ).

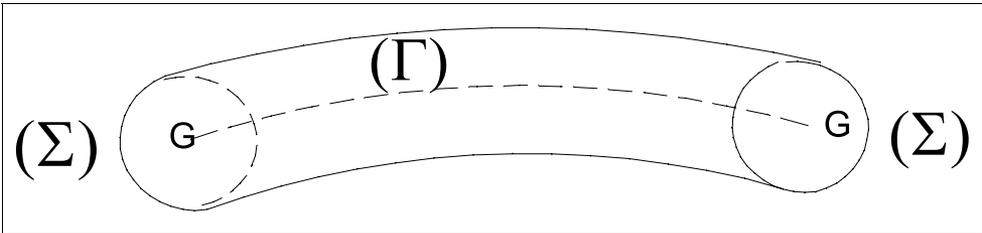


Figure 4.1. Poutre.

L'aire (Σ) est appelée *section droite* ou section¹ *normale* de la poutre. La courbe (Γ) est appelée la *fibre moyenne* de la poutre. Si la fibre moyenne est une droite, la poutre est dite *droite*.

- Pour les poutres à plan moyen (seules considérées dans cet ouvrage), la fibre moyenne se situe dans le plan moyen.

Par ailleurs, il est important de noter que toutes les hypothèses posées par la suite pour la théorie des poutres, ne donnent des résultats acceptables que si

les dimensions transversales de la poutre considérée sont petites par rapport à sa longueur (sans toutefois être trop faibles pour que la poutre devienne très déformable). Pour une poutre droite, le rapport de la hauteur de la section à la longueur de la poutre doit être compris entre $1/5$ et $1/30$. Les valeurs courantes sont de $1/10$ à $1/15$.

- Pour les poutres courbes (arcs), ce rapport peut être réduit à $1/50$ voire $1/100$,
 - le rayon de courbure de la fibre moyenne est suffisamment grand par rapport à la dimension transversale de la poutre. En général, ce rayon doit être supérieur à cinq fois la hauteur de la section,
 - enfin, dans le cas où la poutre est de section variable, la variation de la section doit être lente et progressive.

4.2. FORCES APPLIQUÉES AUX POUTRES

4.2.1. FORCES DONNÉES

Les forces données peuvent être *concentrées* ou *réparties* de façon continue. Dans le cas d'une charge répartie, on appelle *densité de charge* la force appliquée sur l'unité de surface.

Parmi les forces appliquées à une poutre, il est possible de distinguer celles qui sont appliquées de façon permanente ; elles constituent la *charge permanente* (par exemple le poids propre de la poutre ou le poids propre d'éléments qui s'appuient en permanence sur la poutre) et celles qui peuvent être appliquées de façon temporaire et qui constituent les *surcharges* (par exemple : l'action du vent ou de la neige, l'action d'un véhicule qui passe sur un ouvrage d'art, etc.).

4.2.2. RÉACTIONS D'APPUI

En général ce sont des forces considérées comme concentrées.

On distingue :

- *l'appui simple* (figure 4.2, page suivante) constitué, par exemple, par un galet cylindrique ou par une plaque de Néoprène. Les plaques de Néoprène sont utilisées couramment dans les ponts ; on les dispose horizontalement sur les piles ou les culées et les poutres du tablier sont ensuite posées sur ces plaques. L'appui simple donne lieu à une réaction dont la direction est bien déterminée (verticale, en général). Une seule inconnue subsiste : la grandeur de la réaction,
- *l'articulation* (figure 4.2) constituée pour les poutres métalliques par une rotule comprise entre deux balanciers et pour les poutres en béton armé par une section fortement rétrécie (articulation Freyssinet, par exemple). La réaction d'appui correspondante, dont on ne connaît pas a priori la direction, doit passer par un point fixe, le centre de la rotule ou de la section rétrécie déformée plastiquement. Par conséquent deux inconnues subsistent : les deux projections de la réaction sur deux directions non parallèles du plan moyen (en général, les projections verticale et horizontale),

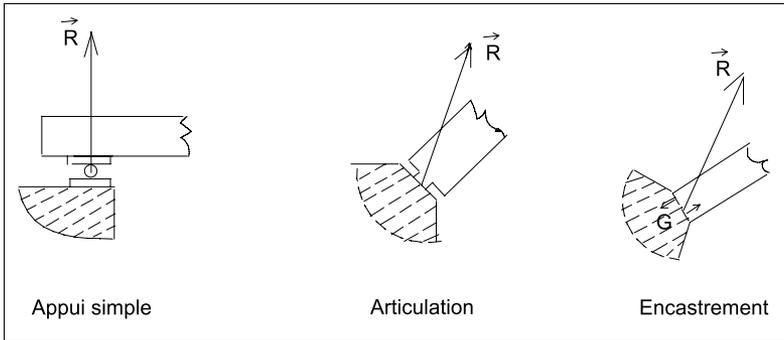


Figure 4.2. Différentes sortes d'appui.

- l'encastrement (figure 4.2) qui a pour objet d'assurer l'invariabilité de la section d'extrémité AB d'une poutre. Dans ce cas, la réaction exercée sur la poutre est une force répartie qu'il est possible de remplacer par sa résultante générale \vec{R} et son moment résultant \vec{M} par rapport au centre de gravité de la section AB. Par conséquent trois inconnues subsistent : les projections de \vec{R} sur deux axes non parallèles et le moment \vec{M} .

4.2.3. RELATIONS ENTRE FORCES DONNÉES ET RÉACTIONS D'APPUI

Toutes les forces appliquées à la poutre doivent former un système en équilibre (cf. § 1.3). En général, pour écrire les équations d'équilibre, il est supposé que la déformation de la poutre peut être négligée : autrement dit, la ligne d'action d'une force n'est pas déplacée par une déformation de la poutre. C'est l'une des hypothèses fondamentales de la théorie de l'élasticité, dont on ne s'affranchit que très rarement (seulement dans l'étude du flambement et l'étude des ponts suspendus).

4.3. PREMIÈRE HYPOTHÈSE FONDAMENTALE DE LA THÉORIE DES POUTRES : PRINCIPE DE SAINT-VENANT

4.3.1. PRINCIPE DE SAINT-VENANT

Les contraintes, dans une région éloignée ⁽¹⁾ des points d'application d'un système de forces, dépendent uniquement de la résultante générale et du moment résultant de ce système de forces ⁽²⁾.

1. Le principe de Saint-Venant suppose que la section considérée dans le calcul soit située suffisamment loin des points d'application des forces concentrées, car, bien qu'en fait il n'existe pas de forces réellement concentrées en un point (sinon il y aurait une contrainte infinie), les contraintes au voisinage des points d'application sont très importantes et nécessitent une étude particulière (non entreprise dans le présent ouvrage).

2. Cette règle vaut également pour les déformations en admettant la loi de Hooke généralisée.

En particulier, deux systèmes de forces équivalentes produisent mêmes contraintes et mêmes déformations (toujours dans une région suffisamment éloignée de leurs points d'application).

Considérons, par exemple, une poutre soumise à des efforts quelconques et séparons-la en deux parties (A) et (B) situées de part et d'autre d'une section droite (S).

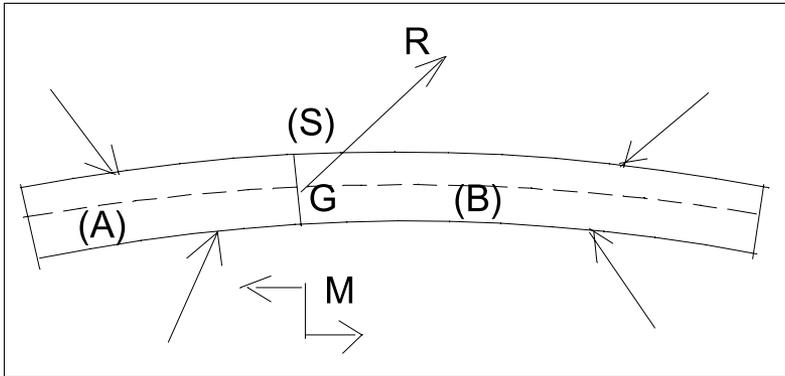


Figure 4.3. Poutre soumise à différents efforts extérieurs.

Comme indiqué au paragraphe 3.2, la partie (B) est en équilibre sous l'action des forces qui lui sont directement appliquées, forces situées à droite de (S), et sous l'action des forces élastiques qu'exerce (A) sur (B). Ces forces élastiques appliquées en (S) ont pour densité, en chaque point de (S), le vecteur contrainte correspondant en ce point.

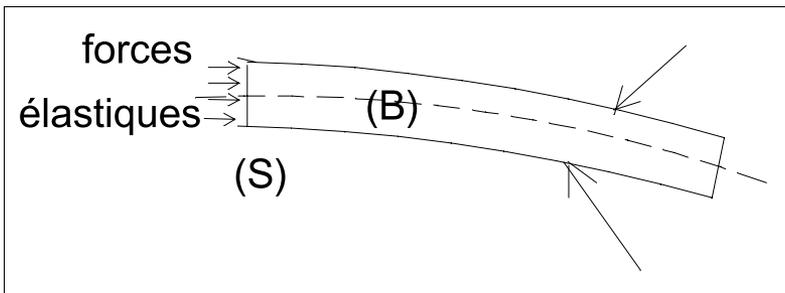


Figure 4.4. Équilibre d'un tronçon de poutre.

Puisque la partie (B) de la poutre est en équilibre sous l'action des forces directement appliquées et de celles appliquées à la partie (A), il en résulte que *le système des forces élastiques s'exerçant sur la section (S) considérée comme appartenant à la partie (B) de la poutre est équivalent au système des forces appliquées à la partie (A)* : c'est le **principe d'équivalence** (figure 4.4).

Appliquons maintenant le principe de Saint-Venant : les contraintes sur la section (S) ne dépendent que de la résultante générale \vec{R} et du moment résultant \vec{M} des forces appliquées sur la partie (A), pris par rapport au centre de gravité G de cette section.

En toute rigueur, il faut soit supposer qu'il n'y a pas de forces appliquées au voisinage de la section (S), soit, s'il y en a, que leur influence est faible par rapport à celle de l'ensemble des forces appliquées.

Remarque

Il est usuel de considérer les forces situées à gauche d'une section, mais il est possible de considérer les forces à droite. Appelons \vec{R}' et \vec{M}' la résultante générale et le moment résultant des forces à droite. L'équilibre de la poutre nécessite que :

$$\vec{R} + \vec{R}' = 0, \text{ soit } \vec{R}' = -\vec{R} \text{ et, de même } \vec{M}' = -\vec{M}$$

Il est parfois plus simple d'effectuer les calculs à partir des forces situées à droite d'une section : il suffit de se rappeler qu'il faut changer de signes pour déterminer \vec{R} et \vec{M} .

4.3.2. SYSTÈME DES FORCES EXTÉRIEURES A UNE SECTION

En considérant la fibre moyenne de la poutre, il est possible de décomposer la résultante générale des forces en ses deux projections (figure 4.5) :

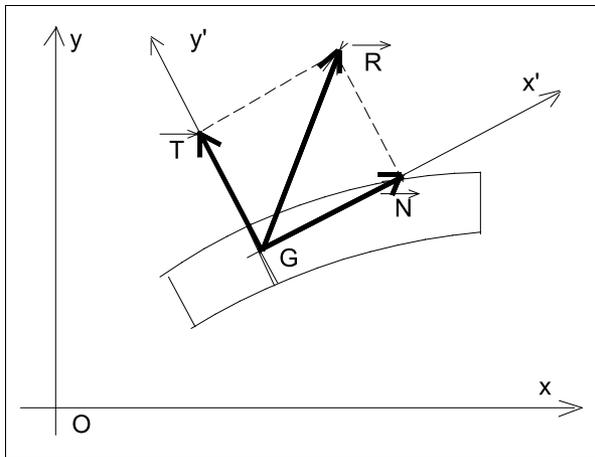


Figure 4.5. Contraintes internes dans une section de poutre.

- la projection sur la tangente, désignée par \vec{N} est appelée **effort normal**,
- la projection sur la normale, désignée par \vec{T} est appelée **effort tranchant** ⁽³⁾.

Comme son nom l'indique, l'effort normal est normal à la section.

L'effort tranchant est situé dans la section. Son nom vient du cisaillement qu'il provoque (glissement de la partie (A) de la poutre par rapport à la partie (B)).

3. Selon certaines notations, l'effort tranchant est désigné par \vec{V} .

De même, le couple résultant peut être décomposé en deux couples :

- l'un normal à la section (S), appelé **moment de torsion** \vec{C} ,
- l'autre situé dans le plan de la section, appelé **moment fléchissant** \vec{M} .

Dans le cas d'une poutre à plan moyen, \vec{N} est porté par l'axe Gx' , et \vec{T} par l'axe Gy' .

Le moment résultant se déduit du moment fléchissant, mesuré en respectant la convention de signe indiquée au paragraphe 1.1.2.

Il est même possible de réduire les systèmes des forces extérieures à une *force unique* \vec{F} équipollente à la résultante générale \vec{R} ; en général elle ne passe pas par le centre de gravité G.

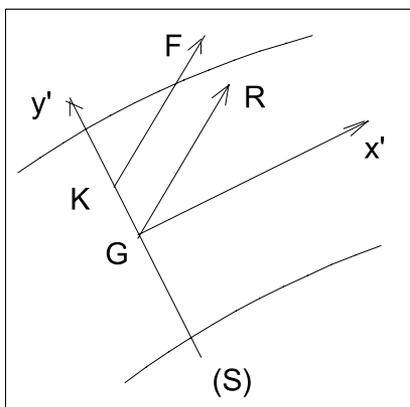


Figure 4.6. Forces unique représentative des forces extérieures appliquées à une section.

Le point K de l'axe Gy' où la ligne d'action de \vec{F} perce le plan de la section (S), décrit, lorsque la section varie le long de la fibre moyenne, la **courbe des pressions** (figure 4.6).

Le moment fléchissant est alors égal au moment de la force \vec{F} pris par rapport au point G.

Le moment de l'effort tranchant \vec{T} par rapport au point G étant nul, le moment fléchissant \vec{M} est finalement égal au moment de l'effort normal \vec{N} par rapport au point G.

Considérons maintenant la section (S') voisine de (S), située à une distance infinitésimale ds de celle-ci (figure 4.7).

Nous supposons qu'entre ces sections droites il n'y a aucune force ponctuelle appliquée ; cependant il peut y avoir des forces réparties d'intensité p par unité de longueur. Au point G', l'effort tranchant sera égal à $T - pds$.

D'autre part, le moment fléchissant est égal au moment de l'effort normal \vec{N} (c'est-à-dire \vec{M} calculé précédemment), augmenté du moment de l'effort tranchant \vec{T} ($T \cdot ds$), et diminué du moment de la charge répartie ($-pds \cdot ds/2$).

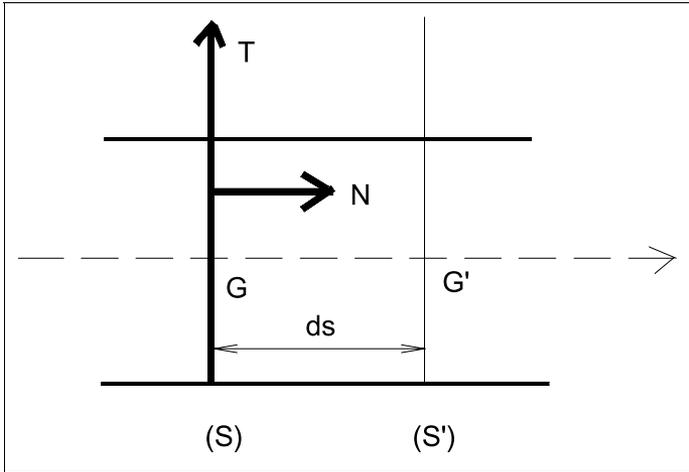


Figure 4.7. Sections voisines.

On obtient : $M + dM = M + Tds - p(ds)^2/2$ et, en négligeant l'infiniment petit du deuxième ordre : $M + dM = M + Tds$, soit $T = dM/ds$: on remarque que l'effort tranchant est la **dérivée** du moment fléchissant par rapport à l'arc de fibre moyenne.

4.3.3. APPLICATION : POUTRE DROITE SUR APPUIS SIMPLES

Considérons une poutre de longueur l , posée sur deux appuis simples A et B, situés sur une même ligne horizontale (figure 4.8).

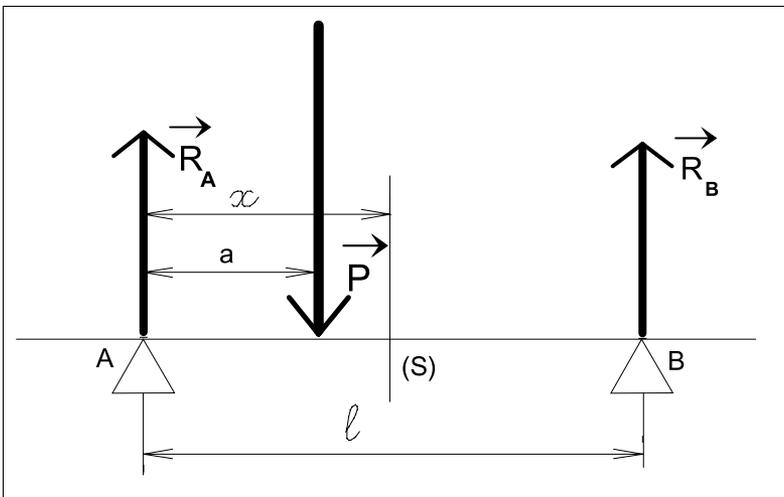


Figure 4.8. Cas d'une force appliquée à une poutre sur appuis simples.

Est appliquée à cette poutre une force \vec{P} verticale, à la distance a de A. Le calcul des différents efforts et moments dans une section droite (S) située à la distance x de A s'effectue comme suit.

Il faut dans un premier temps calculer les réactions R_A et R_B (cf. § 1.3. Elles valent :

$$R_A = P \frac{\ell - a}{\ell} \quad R_B = P \frac{a}{\ell}$$

– Premier cas : $x \leq a$

Les forces à gauche de la section (S) se limitent à la réaction \vec{R}_A . Puisque cette réaction est verticale, donc perpendiculaire à la fibre moyenne de la poutre qui est horizontale :

- l'effort normal est nul : $N = 0$,
- l'effort tranchant est égal à la réaction \vec{R}_A :

$$T = P \frac{(\ell - a)}{\ell}$$

Quant au moment fléchissant, c'est le moment de \vec{R}_A par rapport au centre de gravité de (S), soit :

$$M = R_A \cdot x = Px \frac{(\ell - a)}{\ell}$$

– Second cas : $x \geq a$

Les forces à gauche de (S) sont la réaction \vec{R}_A et la force appliquée \vec{P} :

- l'effort normal est nul,
- l'effort tranchant est calculé comme suit :

$$T = R_A - P \implies T = -P \frac{a}{\ell}$$

On remarque que l'effort tranchant est égal à $-\vec{R}_B$, seule force à droite de (S). Il aurait donc été possible de le calculer directement, en considérant les forces à droite, changées de signe (cf. § 4.3).

Le moment fléchissant est donné par :

$$M = R_A \cdot x - P(x - a) = Pa \frac{(\ell - x)}{\ell}$$

De même que pour l'effort tranchant il aurait été possible de calculer le moment des forces à droite, *changé de signe*, soit :

$$M = -R_B(\ell - x) \times (-1) = +P \frac{a}{\ell} (\ell - x)$$

On retrouve bien le résultat précédent.

☞ Remarque

Le premier signe *moins* correspond au signe du moment de la réaction \vec{R}_B , qui tend à faire tourner le système vers la gauche, contrairement à la réaction \vec{R}_A et à la force \vec{P} , qui tendent à faire tourner le système vers la droite. Le deuxième signe *moins* provient des forces à droite de la section (S).

Il est possible de vérifier que, dans chaque cas, l'effort tranchant est égal à la dérivée du moment fléchissant par rapport à l'abscisse x . Ce résultat est *valable pour toutes les poutres droites*. Pour les arcs, l'effort tranchant \vec{T} est la dérivée du moment fléchissant \vec{M} par rapport à la longueur s de l'arc.

4.4 SECONDE HYPOTHÈSE FONDAMENTALE DE LA THÉORIE DES POUTRES : PRINCIPE DE NAVIER-BERNOULLI

L'hypothèse de Navier-Bernoulli consiste à supposer que, dans la déformation de la poutre, les sections normales à la fibre moyenne restent *planes*. Cette hypothèse est vérifiée pour les déformations dues au seul moment fléchissant, mais n'est plus valable dans le cas où la poutre est soumise à un moment de torsion (cas quasiment exclu dans le présent ouvrage).

Il est également admis que cette hypothèse est aussi valable dans le cas général où il y a un effort tranchant.

Cette hypothèse est maintenue dans les règlements de béton armé ou précontraint, même lors des calculs aux états-limites de rupture.

4.5 EXERCICE : ARC SYMÉTRIQUE À TROIS ARTICULATIONS

☞ Énoncé

Considérons un arc symétrique à trois articulations A, B et C, non pesant, soumis à une force \vec{P} disposée au point D (figure 4.9, page suivante).

1. Cet arc est-il isostatique (voir au § 1.3 la définition d'un système isostatique) ?
2. Calculer les réactions en A et B.
3. Calculez le moment fléchissant, l'effort tranchant et l'effort normal en un point situé légèrement à gauche de D (figure 4.10).

☞ Solution

1° Les inconnues sont les réactions aux points A et B. (La réaction au point C est également une inconnue, mais c'est une force *intérieure* à l'arc. Elle ne doit donc pas être prise en compte pour la détermination du caractère isostatique ou hyperstatique de l'arc).

A et B étant deux articulations, les réactions se limitent à de simples forces passant par les points A et B, à l'exclusion de tout moment d'encastrement. En revanche, ces

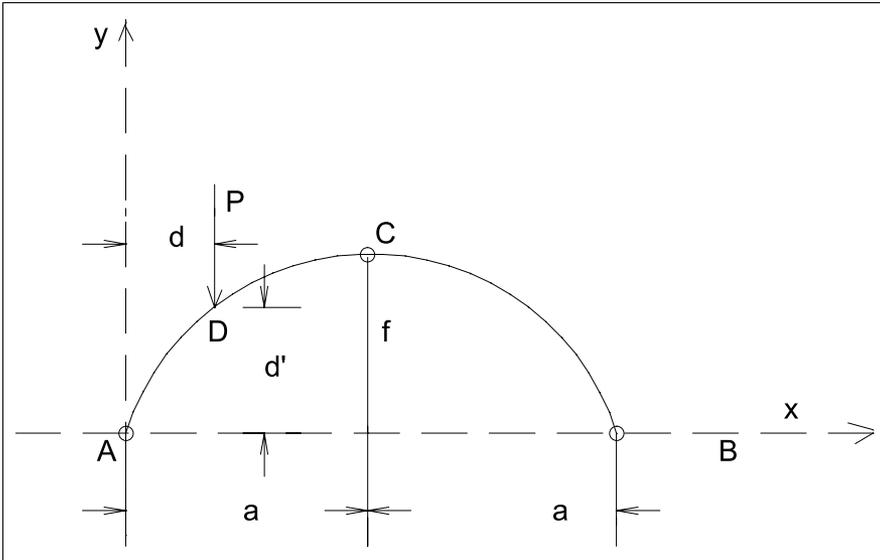


Figure 4.9. Arc à trois articulations.

forces ont une direction quelconque, du fait des articulations. Il faut les décomposer en leurs projections sur les axes Ax et Ay , c'est-à-dire :

$$\vec{R}_A : (X_A, Y_A) \text{ et } \vec{R}_B : (X_B, Y_B)$$

soit au total quatre inconnues.

Les relations permettant de les calculer sont les suivantes :

– les trois équations d'équilibre,

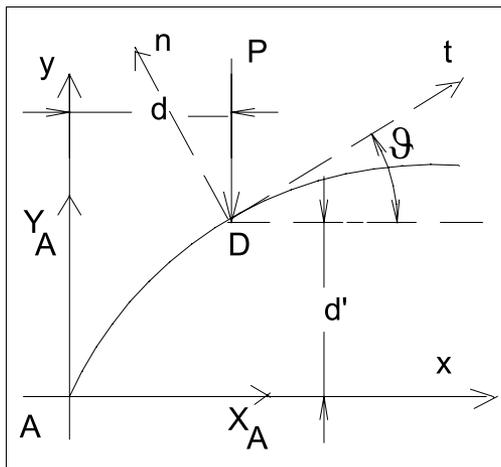


Figure 4.10. Effort normal, effort tranchant et moment fléchissant en un point de l'arc.

- la relation indiquant que C est une articulation, c'est-à-dire que le moment fléchissant en C est nul. En effet, la réaction du demi arc CB sur le demi arc CA passe par C du fait de l'articulation, et donc son moment par rapport à C est nul.

Le nombre d'équations étant égal au nombre d'inconnues, le système est isostatique. Si l'arc n'avait que deux articulations, il serait en revanche hyperstatique.

2° Déterminons les quatre relations indiquées ci-dessus :

- La somme des forces horizontales est nulle :

$$X_A + X_B = 0 \quad (4.1)$$

- La somme des forces verticales est nulle :

$$Y_A + Y_B - P = 0 \quad (4.2)$$

- Le moment en un point quelconque est nul. Prenons, par exemple, au point B :

$$2a \cdot Y_A - P(2a - d) = 0 \quad (4.3)$$

- Le moment fléchissant en C est nul :

$$a \cdot Y_A - P(a - d) - X_A \cdot f = 0 \quad (4.4)$$

L'équation (4.3) permet d'écrire :

$$Y_A = P \frac{(2a - d)}{2a}$$

L'équation (4.2) permet d'obtenir, en remplaçant Y_A par la valeur trouvée :

$$Y_B = P \frac{d}{2a}$$

L'équation (4.4) permet de calculer :

$$X_A = P \frac{d}{2f}$$

et l'équation (4.1) permet d'obtenir :

$$X_B = -P \frac{d}{2f}$$

3° L'effort normal, l'effort tranchant et le moment fléchissant en un point de l'arc sont représentés sur la figure 4.10, page précédente.

- Le moment fléchissant est égal à la somme des moments de X_A et de Y_A , soit :

$$M = P \frac{(2a - d)}{2a} \cdot d - P \frac{d}{2f} \cdot d'$$

- L'effort tranchant est porté par la perpendiculaire Dn à la fibre moyenne ; il est égal à la projection des forces à gauche du point D sur cette droite Dn :

$$T = P \frac{(2a - d)}{2a} \cos \theta - P \frac{d}{2f} \sin \theta$$

La force \vec{P} n'intervient pas, puisque nous sommes volontairement légèrement à gauche de D.

- L'effort normal est la projection sur Dt des forces à gauche du point D, soit :

$$N = P \frac{(2a - d)}{2a} \sin \theta + P \frac{d}{2f} \cos \theta$$

5 Contraintes dues à l'effort normal et au moment fléchissant

5.1. ÉTUDE DE L'EFFORT NORMAL. COMPRESSION OU TRACTION SIMPLE

Considérons un élément de poutre compris entre deux sections (S) et (S') parallèles, de centres de gravité respectifs G et G'. L'élément de fibre moyenne GG' a pour longueur Δx . Les deux sections (S) et (S') sont soumises à des efforts normaux \bar{N} et $-\bar{N}$.

Il convient de compter positivement \bar{N} pour une compression, négativement pour une traction (figure 5.1, page suivante).

Un effort normal *simple* est obligatoirement appliqué au centre de gravité de chaque section; sinon la section serait également soumise à un moment, hypothèse exclue pour le présent cas de figure.

Les contraintes sont *normales* et réparties uniformément sur toute la surface de la section. Rappelons que la section est située à une distance assez éloignée du point d'application des charges.

La valeur de cette contrainte uniforme est $\sigma = N/S$ en appelant S l'aire de la section (S). Si N est exprimé en Newton (N) et S en m^2 , la contrainte σ est exprimée en Pascal (Pa).

L'élément de fibre de longueur Δx , compris entre (S) et (S'), subit, selon la loi de Hooke, un allongement égal à :

$$\Delta(\Delta x) = -\frac{N}{E \cdot S} \Delta x$$

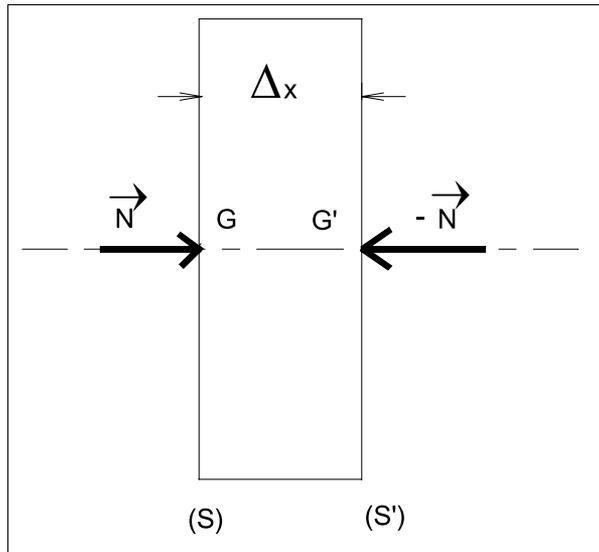


Figure 5.1. Compression d'un élément de poutre.

Donc les deux sections (S) et (S') se déplacent pendant la déformation, parallèlement entre elles, sans rotation de l'une par rapport à l'autre.

5.2. ÉTUDE DU MOMENT FLÉCHISSANT

5.2.1. FLEXION PURE

Il y a flexion pure, lorsqu'un élément de poutre est soumis seulement à un moment fléchissant, sans effort tranchant.

Cette dernière condition nécessite que le moment fléchissant soit constant, sinon il y aurait un effort tranchant égal à la dérivée du moment fléchissant par rapport à l'arc de la fibre moyenne, comme indiqué ci-dessus.

Considérons un élément de la poutre compris entre deux sections infiniment voisines (S) et (S'). Les deux sections sont supposées soumises à des couples égaux au moment fléchissant \bar{M} , comme indiqué sur la figure 5.2, page suivante ; la figure est faite de telle sorte que M soit positif.

D'après le principe de Navier-Bernoulli les longueurs des fibres varient comme si les sections restaient planes après déformation⁽¹⁾. Il en résulte que la section (S') subit par rapport à (S) une rotation relative : sa nouvelle position est (S'') comme indiqué sur la figure 5.2, page ci-contre.

1. Les sections restent effectivement planes dans le cas de la flexion pure.

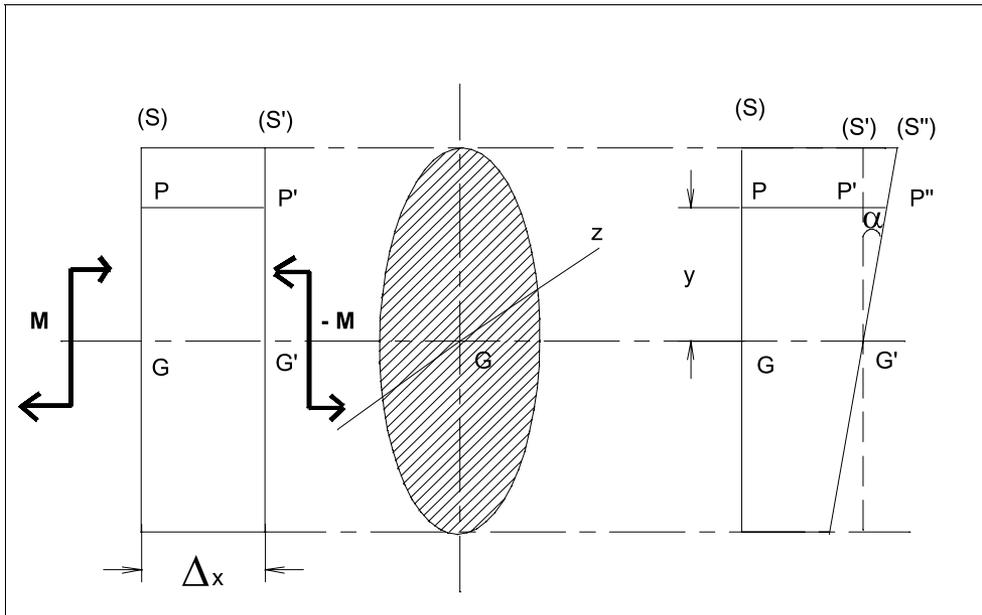


Figure 5.2. Moment agissant sur deux sections voisines. À droite : rotation de la section (S').

On démontre que le centre de gravité G' ne varie pas et que l'axe Gz est l'axe de rotation de la section (S').

En application de la loi de Hooke, les contraintes normales sont proportionnelles aux allongements des fibres telles que PP' . En posant $GP = y$, on voit (figure 5.2) que l'allongement $P'P''$ de PP' est égal à $y \tan \alpha$, α étant l'angle de rotation de la section (S') par rapport à son centre de gravité G' . L'allongement des fibres étant proportionnel à y , la contrainte normale est donc également proportionnelle à y . Elle est égale à :

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (5.1)$$

- M étant le moment fléchissant, exprimé en mN ;
- I étant le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe Gz , exprimé en m^4 ;
- y étant exprimé en m , σ est exprimé en Nm^{-2} .

Sur Gz , y étant nul, la contrainte est nulle ; c'est pourquoi on appelle Gz l'axe neutre. Dans le cas de la flexion pure, il n'y a pas d'autre contrainte que la contrainte normale.

Quant à la rotation relative de la section (S') par rapport à la section (S), elle provoque un allongement des fibres telle que la fibre PP' , qui est égal, d'après la loi de Hooke, à :

$$P'P'' = \frac{\sigma \Delta x}{E}$$

Soit, en remplaçant σ par sa valeur donnée en (5.1), on obtient :

$$P'P'' = \frac{M}{EI}y\Delta x$$

Considérons maintenant la figure 5.3 montrant la rotation de la section (S') autour de l'axe $G'z$ passant par son centre de gravité (G').

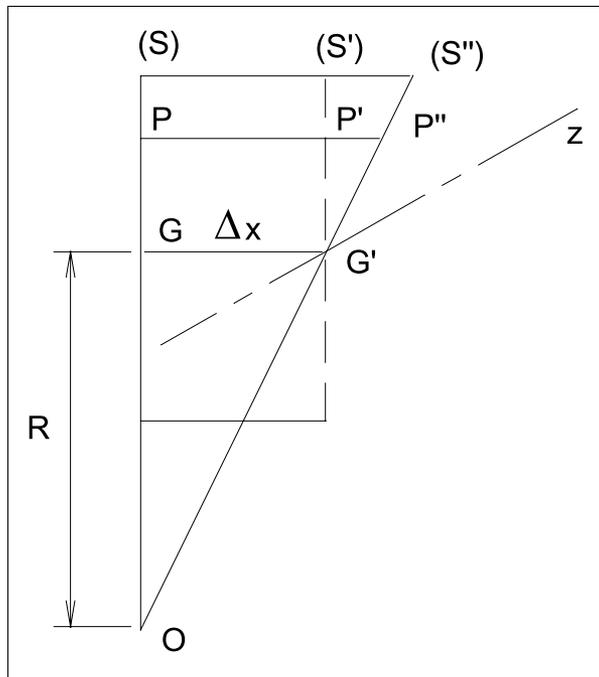


Figure 5.3. Rotation de la section (S') autour de l'axe $G'z$.

La section (S') parallèle à la section (S) avant déformation, vient couper celle-ci selon une droite représentée sur le plan de projection par le point O .

En considérant les triangles semblables $G'P'P''$ et OGG' le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{P'P''}{P'G'} = \frac{GG'}{GO} \text{ soit } \frac{My\Delta x}{EIy} = \frac{\Delta x}{R}$$

En simplifiant, l'équation devient :

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

Dans le cas de la flexion pure, le moment M est supposé constant. En considérant une poutre constituée d'un matériau homogène (c'est-à-dire E constant), et de section

constante (donc de moment d'inertie I constant), R est constant. Les centres de gravité de toutes les sections se trouvent ainsi disposés sur un cercle de centre O . C' est pourquoi la flexion pure est également appelée *flexion circulaire*.

Remarque

Pour obtenir dans une poutre un moment constant, ou du moins quasi constant, on retient le dispositif suivant :

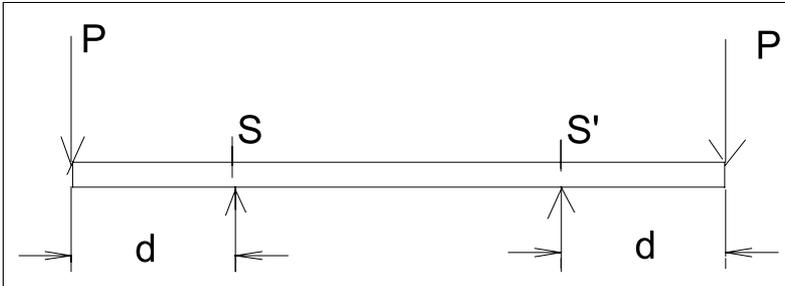


Figure 5.4. Détermination d'un moment fléchissant constant.

Entre les sections (S) et (S') , si l'on néglige le poids de la poutre par rapport aux forces extérieures, il existe un moment constant égal à $M = -P \cdot d$.

5.2.2. FLEXION SIMPLE

Lorsque le moment fléchissant n'est pas constant, il est accompagné d'un effort tranchant, égal à sa dérivée par rapport à l'arc de la fibre moyenne.

S'il n'y a pas d'effort normal, on dit qu'il y a *flexion simple*. S'il y a un effort normal, on dit qu'il y a *flexion composée*.

Les résultats de l'étude de la flexion simple sont très semblables à ceux de la flexion pure :

- chaque section (S) pivote autour de l'axe G_z . Toutefois, le rayon de courbure R de la *fibre moyenne déformée* (lieu de G_z après déformation) n'est plus constant, puisque le moment fléchissant n'est pas constant ;
- la contrainte normale est toujours $\sigma = \frac{My}{I}$, mais elle n'est plus seule : des contraintes tangentielles (cf. chapitre 6) s'y ajoutent.

5.2.3. FLEXION COMPOSÉE

Une section est dite sollicitée à la flexion composée, lorsqu'elle supporte à la fois un moment fléchissant \bar{M} , un effort normal \bar{N} et un effort tranchant \bar{T} .

L'étude de la flexion composée (figure 5.5, page suivante) résulte immédiatement de la superposition des résultats obtenus dans l'étude de la compression simple et dans celle de la flexion simple.

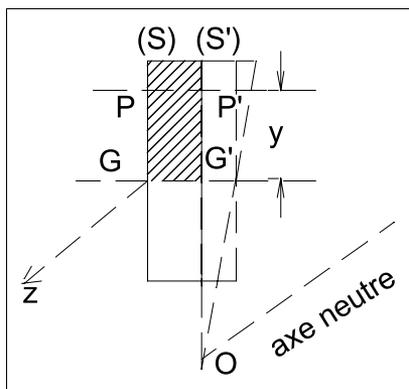


Figure 5.5. Position de l'axe neutre en flexion composée

Elle implique les phénomènes suivants :

- le déplacement relatif de la section (S) voisine de (S') pendant la déformation, comprend une translation (due à l'effort normal \bar{N}) et une rotation autour de l'axe Gz (due au moment fléchissant);
- la contrainte normale en un point P situé à une distance y de la fibre moyenne est égale à :

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{My}{I}$$

L'axe neutre est défini comme le lieu des contraintes nulles. La relation $\sigma = 0$ correspond donc à :

$$\frac{N}{S} + \frac{My}{I} = 0$$

d'où :

$$y = -\frac{N}{S} \frac{I}{M}$$

Cet axe neutre est parallèle à celui dû au seul moment fléchissant, mais il ne passe pas par le centre de gravité.

Or la section est soumise à un effort \bar{N} appliqué en son centre de gravité, et à un couple \bar{M} . Il est donc possible de remplacer ce couple par une force unique \bar{F} , appliquée en un point C différent du centre de gravité (figure 5.6, page ci-contre).

Pour respecter les principes de la statique, il faut que :

- cette force soit égale à l'effort normal : $\bar{F} = \bar{N}$ (égalité des résultantes générales des deux systèmes);
- le moment de cette force par rapport à G soit égal au couple M : $M = N \times GC$.

La position du point C est ainsi connue. Le point C est appelé *point de passage* de la force extérieure. Lorsque (S) varie, il décrit la *courbe des pressions*.

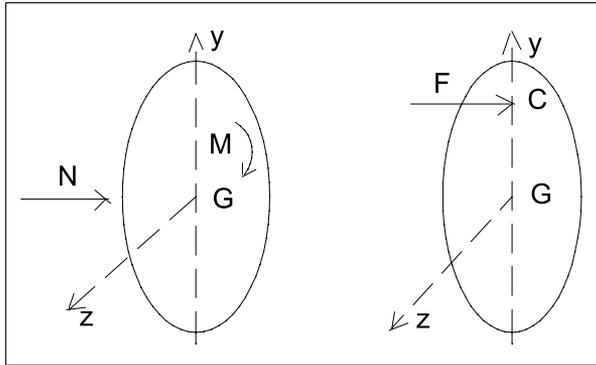


Figure 5.6. Couple et force équivalente.

5.2.4. NOYAU CENTRAL - RÉSISTANCE DES MAÇONNERIES

Certains matériaux, tels que les maçonneries ou le béton non armé, ne peuvent supporter, en toute sécurité, que des contraintes normales de *compression*. Il est donc intéressant de déterminer dans quelle partie de la section doit se trouver le point de passage C de la force extérieure (qui est nécessairement une force de compression : $N > 0$), de sorte que la section (S) soit *entièrement comprimée*. Cette partie de section comprimée est appelée **noyau central**.

Pour déterminer le noyau central, il suffit d'écrire :

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{My}{I} \geq 0$$

soit

$$\frac{M}{N} = GC > -\frac{I}{Sy}, \text{ si } y > 0 \quad \text{et} \quad GC < -\frac{I}{Sy}, \text{ si } y < 0$$

Dans le cas d'une section rectangulaire de base b et de hauteur h , on obtient :

- la section : $S = bh$;
- le moment d'inertie par rapport à l'axe Gz : $I = bh^3/12$;
- le maximum de y : $\pm h/2$.

Il en résulte que $-h/6 < GC < h/6$.

Dans le cas de la section rectangulaire, la partie de Gy à l'intérieur de laquelle doit se trouver le point C correspond donc au tiers de la hauteur h : elle est appelée *tiers central* (figure 5.7, page suivante).

☞ Remarque

Une autre représentation, utilisée en béton armé et précontraint peut être utilisée pour déterminer le noyau central.

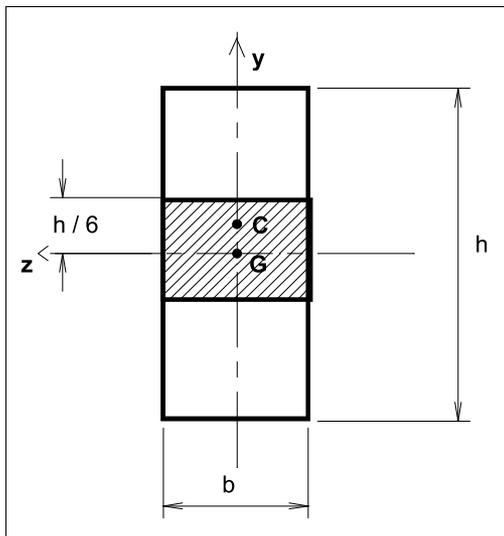


Figure 5.7. Tiers central.

En effet, comme indiqué précédemment (figure 5.5, page 52), la déformation d'une section quelconque, en flexion composée, comporte une petite translation parallèle à la fibre moyenne et une légère rotation autour de l'axe Gz .

Or, d'après la loi de Hooke, les contraintes sont proportionnelles aux déformations. Donc il est possible de tracer une courbe représentative des contraintes en fonction de la distance à l'axe neutre très semblable à la courbe des déformations (figure 5.8).

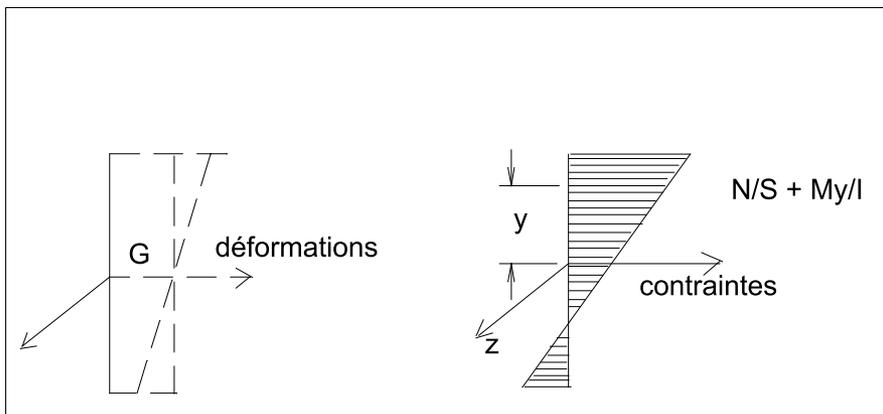


Figure 5.8. Représentation des contraintes en flexion composée.

La partie de la courbe située du côté des contraintes positives représente la partie de la section comprimée. L'autre partie correspond à la partie de la section tendue.

Dans le cas des maçonneries, toute la section doit être comprimée. Donc le diagramme des contraintes doit être du type triangulaire, voire trapézoïdal (figure 5.9, page ci-contre).

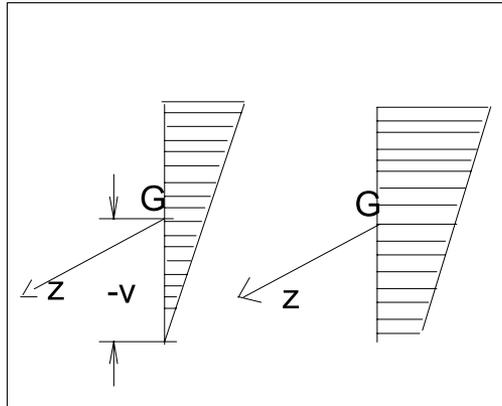


Figure 5.9. Diagramme des contraintes en compression.

Dans le cas limite du diagramme triangulaire, la contrainte est nulle si :

$$\frac{N}{S} - \frac{My}{I} = 0$$

soit :

$$\frac{M}{N} = \frac{I}{Sv}$$

Nous retrouvons ainsi le noyau central défini précédemment.

5.3. EXERCICES

5.3.1. ÉTUDE D'UNE POUTRE MÉTALLIQUE

➡ Énoncé

Considérons une poutre métallique constituée par un profilé IPN de 120 mm de hauteur.

Un tel profilé a une section de $14,2 \text{ cm}^2$ et un moment d'inertie de 328 cm^4 . Calculez les contraintes sur les fibres extrêmes :

1. dans le cas où la poutre est soumise à un effort de compression de 100 000 N. Le phénomène de flambement étudié par la suite est négligé ;
2. dans le cas où, en plus de cet effort de compression, la poutre est soumise à un moment fléchissant de 5 470 mN.

➡ Solution

1. La contrainte due à l'effort normal est :

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{100\,000 \text{ N}}{14,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 7 \cdot 10^7 \text{ Pa ou } 70 \text{ MPa}$$

2. La contrainte vaut maintenant :

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{My}{I} \text{ avec } y = \pm 60 \text{ mm}$$

d'où :

$$\frac{I}{y} = \frac{328}{6} = 54,7 \text{ cm}^3 \text{ ou } 54,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

Ce qui donne :

$$\sigma = 70 \text{ MPa} \pm \frac{5\,470}{54,7 \cdot 10^{-6}} = 70 \pm 100 \text{ MPa}$$

d'où le diagramme des contraintes de la figure 5.10.

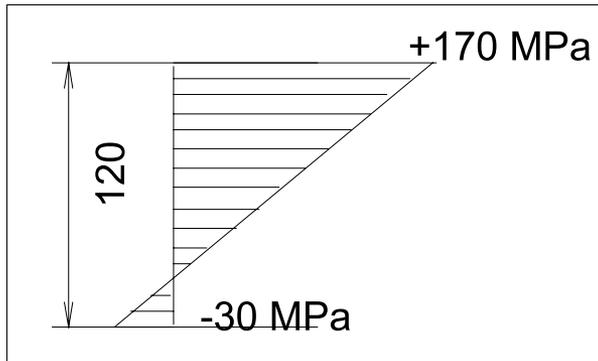


Figure 5.10. Diagramme des contraintes.

5.3.2. ÉTUDE D'UNE SECTION CIRCULAIRE

➡ Énoncé

Déterminer le noyau central d'une section circulaire.

➡ Solution

Appliquons la méthode générale du paragraphe 5.2.3. La condition est :

$$\overline{OC} > -\frac{I}{Sy} \text{ si } y > 0 \text{ et } \overline{OC} < -\frac{I}{Sy} \text{ si } y < 0$$

$$\text{avec } I = \frac{\pi R^4}{4}, S = \pi R^2 \text{ et } y = \pm R$$

Il en résulte : $-R/4 < \overline{OC} < R/4$: le noyau central est situé dans le *quart central* (figure 5.11, page ci-contre).

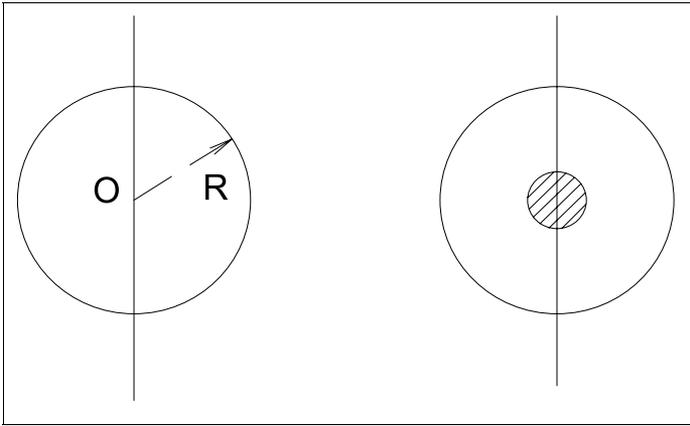


Figure 5.11. Quart central d'une section circulaire.

5.3.3. ÉTUDE D'UNE FONDATION

➡ Énoncé

Considérons le mur de fondation dont la coupe longitudinale est donnée sur la figure 5.12 :

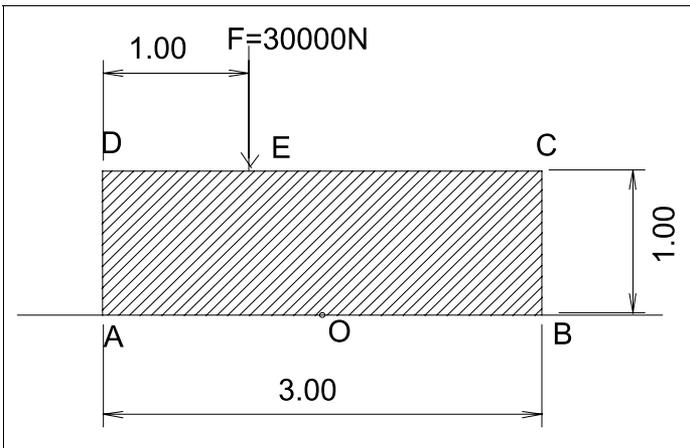


Figure 5.12. Fondation parallélépipédique.

Ce mur est constitué d'un parallélépipède en béton de longueur 3,00 m, de hauteur 1,00 m et de largeur 1,00 m.

Ce mur supporte au point E une force $F = 30\,000\text{ N}$ (représentant, par exemple, la charge d'un poteau).

Sachant que le poids volumique du béton est de $23\,000\text{ N/m}^3$, étudiez la répartition des contraintes sur la face inférieure du mur (AB).

1. Déterminez la force de compression appliquée sur la face (AB).
2. Calculez les contraintes extrêmes aux points A et B et dessinez la courbe de répartition des contraintes.
3. Déterminez la position de la force extérieure unique représentant la résultante générale et le couple appliqués à la section horizontale de base (AB).

➡ Solution

1. La résultante des forces est une force de compression : sa valeur est égale au poids de la maçonnerie, soit $69\,000\text{ N}$, augmenté du poids du poteau, soit $30\,000\text{ N}$, donc un total de $99\,000\text{ N}$.
2. La force \bar{F} étant excentrée par rapport au centre de gravité de la section, produit un moment dans cette section, égal au produit de la force par le bras de levier de $0,50\text{ m}$ par rapport au centre de gravité O de la section, soit $M = 15\,000\text{ mN}$.

Pour calculer les contraintes, on applique la formule donnée ci-dessus :

$$\sigma = \frac{N}{S} \pm \frac{Mv}{I}$$

avec : $N = 99\,000\text{ N}$; $S = 3\text{ m}^2$; $M = 15\,000\text{ mN}$; $v = 1,50\text{ m}$

$$\text{et } I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1 \times 3^3}{12} = 2,25\text{ m}^4$$

D'où $\sigma = 33\,000 \pm 10\,000\text{ Pa}$, soit $23\,000\text{ Pa}$ en B et $43\,000\text{ Pa}$ en A, et la distribution trapézoïdale de la figure 5.13.

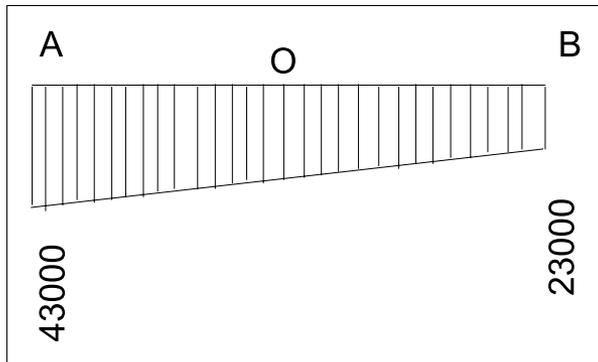


Figure 5.13. Distribution trapézoïdale des contraintes.

3. La force extérieure unique représentative de l'ensemble a pour valeur 99 000 N et doit être placée de manière à produire un moment égal à celui déterminé précédemment, soit 15 000 mN.

La position P du point d'application de la force est donc telle que :

$$OP = 15\,000/99\,000 = 0,1515 \text{ m, P étant situé entre A et O.}$$

Pour une longueur de 3,00 m, le noyau central (ici, le tiers central), est situé 0,50 m de part et d'autre du point O. Le point P est donc situé largement à l'intérieur du noyau central, ce qui est vérifié par les valeurs positives des contraintes.

6

Contraintes produites par l'effort tranchant

6.1. GÉNÉRALITÉS

L'effort tranchant relatif à une section de poutre a pour effet de faire glisser la partie de la poutre par rapport à la partie droite, le long de cette section : l'effort tranchant produit donc dans la section des efforts tangentiels, appelés aussi *efforts de cisaillement*.

Il ne produit d'ailleurs que des efforts tangentiels. Les efforts normaux qui sont concomitants aux efforts tangentiels, sont dus uniquement au moment fléchissant qui accompagne l'effort tranchant⁽¹⁾.

Dans le cas des poutres à plan moyen, l'effort tranchant \vec{T} est dirigé selon l'axe Gy .

Les composantes \vec{t}_y et \vec{t}_z de la contrainte de cisaillement doivent satisfaire aux relations suivantes :

$$\sum t_y \cdot ds = T \quad (6.1)$$

$$\sum t_z \cdot ds = 0 \quad (6.2)$$

D'autre part, les composantes \vec{t}_y et \vec{t}_z sont liées entre elles. Il en résulte⁽²⁾ qu'au voisinage du contour de la section, la contrainte de cisaillement est *parallèle* au contour (figure 6.1, page suivante).

1. Rappelons que l'effort tranchant est la dérivée du moment fléchissant par rapport à l'arc de la fibre moyenne.

2. Nous l'admettrons sans démonstration.

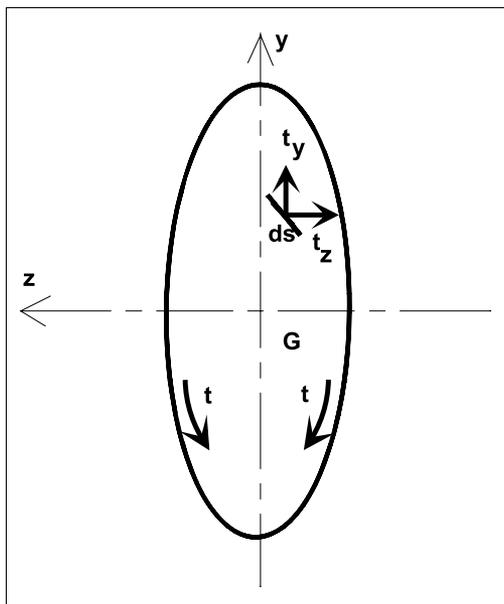


Figure 6.1. Contraintes tangentielles à l'intérieur d'une section.

D'autre part, considérons une poutre constituée de plusieurs lamelles superposées, de même longueur et de même épaisseur (figure 6.2, page ci-contre).

Cette poutre, reposant sur deux appuis simples de niveau, est chargée en son milieu. La poutre se déforme et chaque lamelle glisse par rapport aux lamelles adjacentes (figure 6.2, page suivante).

Ce glissement est provoqué par des contraintes tangentielles longitudinales à la poutre.

La flexion simple engendre donc des contraintes de cisaillement dans deux catégories de plans perpendiculaires : le plan des sections droites (figure 6.1) et les plans longitudinaux (figure 6.2.b, page suivante).

Ces résultats correspondent au théorème de Cauchy : les contraintes de cisaillement agissant sur deux plans perpendiculaires sont telles que leurs composantes perpendiculaires à la droite d'intersection des deux plans sont égales et dirigées toutes deux, soit vers la droite, soit en sens inverse (figure 6.3, page ci-contre).

6.2. CALCUL DE LA CONTRAINTE DE CISAILLEMENT

Une théorie simplifiée consiste à supposer que :

- la composante \underline{t}_z de la contrainte est négligeable,
- la composante \underline{t}_y de la contrainte est constante sur toute parallèle AB à l'axe Gz .

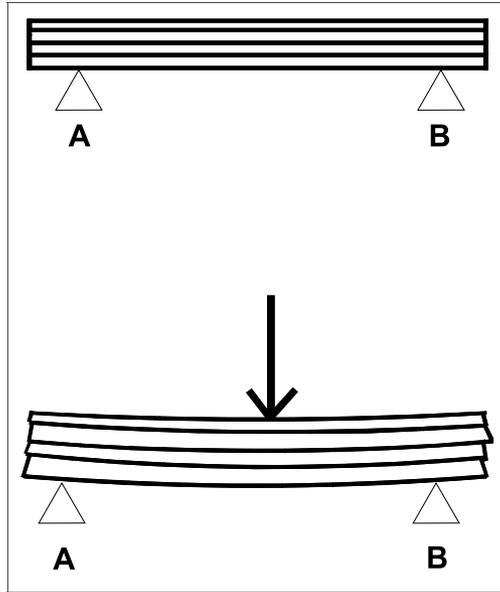


Figure 6.2. Poutre non chargée (en haut) et chargée (en bas).

La valeur de la composante \vec{t}_y est alors donnée par la formule :

$$t_y = \frac{T \cdot m}{I \cdot b} \quad (6.3)$$

où :

- T est l'effort tranchant,
- m est le moment statique de l'aire hachurée sur la figure 6.4, page suivante,
- I est le moment d'inertie de la section **totale** par rapport à Gz ,
- b est la largeur de la section suivant AB .

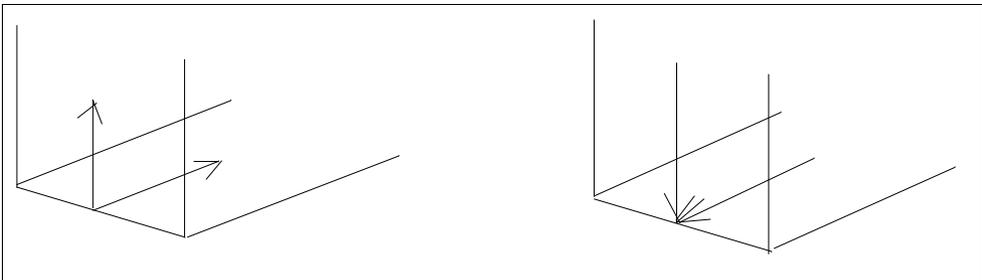


Figure 6.3. Contraintes tangentielles sur deux faces perpendiculaires.

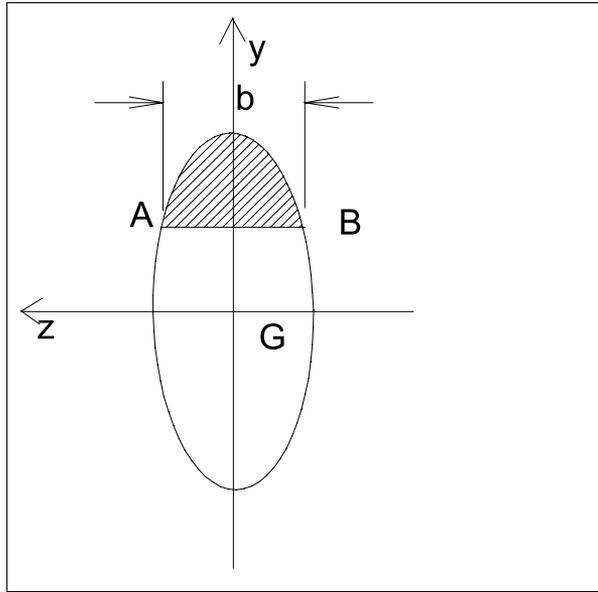


Figure 6.4. Contrainte de cisaillement sur la droite AB.

En effet, considérons un prisme élémentaire de section dS compris entre deux sections droites (S) et (S') infiniment voisines (distantes de ds), et situé au-dessus du plan AB (figure 6.5, page ci-contre).

En supposant qu'aucune force extérieure ne soit appliquée à la poutre entre les sections (S) et (S'), ce prisme est en équilibre sous l'action des forces suivantes :

- son poids, dans ce cas négligé,
- sur la section (S) :
 - d'une part, les forces $\sigma \cdot dS$ dues aux contraintes normales résultant du moment fléchissant \bar{M} ,
 - d'autre part, les forces $t_y \cdot dS$ dues aux contraintes tangentielles résultant de l'effort tranchant \bar{T} ,
- sur la section (S') :
 - d'une part, les forces $\sigma' \cdot dS$ résultant du moment fléchissant $= M + dM$,
 - d'autre part, les forces $t_y \cdot dS$ résultant de l'effort tranchant $T' = T$ (puisque'il n'y a pas de force appliquée entre (S) et (S')),
- sur la face parallèle à ABA'B', les forces $t_y \cdot dz \cdot ds$ dues aux contraintes de cisaillement longitudinal.

Au total, l'égalité suivante doit être vérifiée :

$$\sigma dS - \sigma' dS + t_y dz ds = 0$$

avec : $dS = dz \cdot dy$

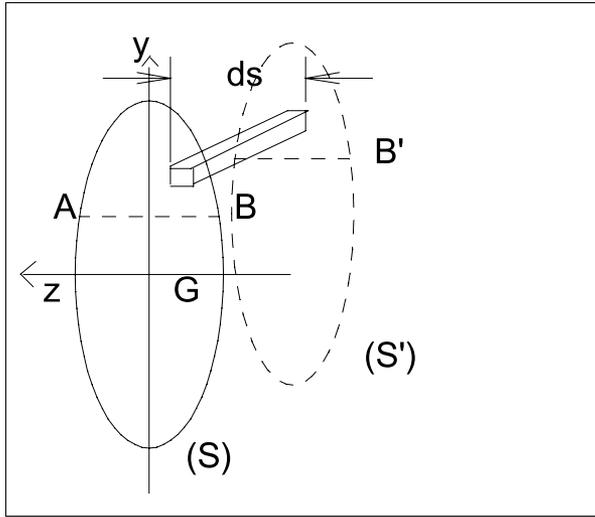


Figure 6.5. Contraintes appliquées à un prisme élémentaire.

soit :

$$\sigma dy - \sigma' dy + t_y ds = 0$$

et

$$\frac{\sigma' - \sigma}{ds} = \frac{t_y}{dy} .$$

Or :

$$\sigma = \frac{My}{I} ; \quad \sigma - \sigma' = dM \frac{y}{I} ; \quad \frac{\sigma - \sigma'}{ds} = \frac{dM}{ds} \frac{y}{I} = T \frac{y}{I}$$

d'où :

$$t_y = \frac{T}{I} y dy .$$

Étendons maintenant la formule à l'ensemble de la surface hachurée de la figure 6.4.

On a :

$$\sum t_y = b t_y = \frac{T}{I} \sum y dy = \frac{Tm}{I}$$

où m est le moment statistique de la surface hachurée par rapport à l'axe G_z . On a bien démontré la formule 6.3 :

$$t_y = \frac{Tm}{Ib}$$

Il est possible de vérifier que les relations (6.1) et (6.2) sont satisfaites. La composante : t_y de la contrainte varie avec l'ordonnée y comme le rapport m/b puisque m et b sont fonction de y .

Elle est nulle aux points les plus éloignés de l'axe Gz et passe par un maximum pour l'ordonnée y correspondant au maximum de m/b . Ce maximum est généralement atteint pour $y = 0$ (mais ce n'est pas toujours vrai).

Considérons le cas particulier de la contrainte appliquée au niveau du centre de gravité ($y = 0$).

Dans le plan Gxy (c'est-à-dire le plan moyen de la poutre), les contraintes normales dues au moment fléchissant sont représentées par une droite $A'B'$ passant par G (figure 6.6).

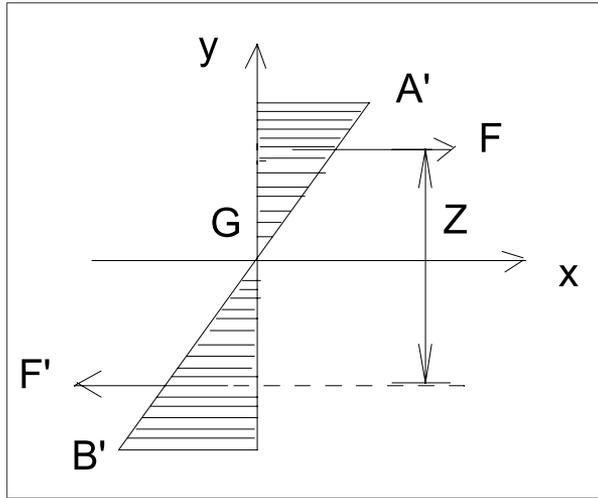


Figure 6.6. Contraintes normales dans le plan moyen.

Rappelons que la contrainte normale est proportionnelle à l'ordonnée y selon la formule :

$$\sigma = \frac{M}{I}y$$

La partie GA' de la ligne représentative des contraintes correspond aux ordonnées positives ($y > 0$), c'est-à-dire aux contraintes de compression. La partie GB' correspond aux contraintes de traction.

L'ensemble des forces de compression a pour résultante une force \vec{F} passant par le centre de gravité du triangle GAA' . De même, les forces de traction ont pour résultante une force \vec{F}' passant par le centre de gravité du triangle GBB' .

Pour obtenir un état d'équilibre, le système des forces \vec{F} et \vec{F}' , qui sont des forces élastiques intérieures, doit compenser le système des forces extérieures, qui, dans le cas d'un seul moment fléchissant, se réduit à un couple. Donc \vec{F} et \vec{F}' doivent former un couple, c'est-à-dire : $\vec{F} = -\vec{F}'$.

Z désignant le bras de levier du couple, on obtient : $M = F \times Z$.

Or, la formule donnant la valeur de la contrainte de cisaillement t_y s'écrit :

$$t_y = \frac{T \cdot m}{I \cdot b}$$

où m est ici le moment statique de la partie de la section située au-dessus de l'axe Gz (figure 6.7), soit $m = \sum y ds$.

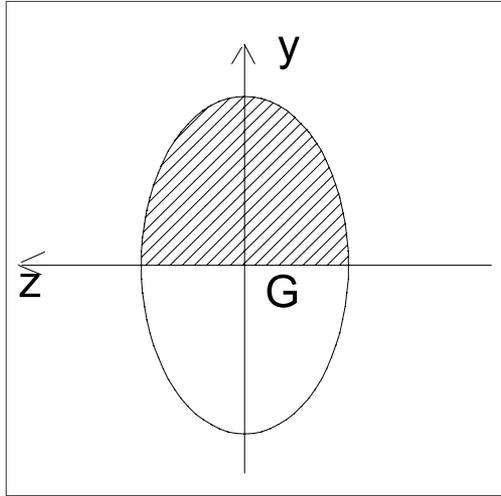


Figure 6.7. Section située au-dessus de l'axe Gz .

Remplaçons y par sa valeur tirée de la formule donnant la contrainte normale :

$$\sigma = \frac{My}{I}, \text{ soit } y = \sigma \frac{I}{M}$$

on obtient :

$$m = \sum (\sigma \frac{I}{M} ds) = \frac{I}{M} \sum (\sigma \cdot ds)$$

où $\sum (\sigma \cdot ds)$ représente la somme des forces élastiques situées au-dessus de l'axe Gz , c'est-à-dire la somme des forces élastiques de compression, soit leur résultante \bar{F} .

Nous obtenons donc $m = IF/M = I/Z$.

La formule donnant la contrainte de cisaillement au niveau du centre de gravité devient alors la formule simple suivante :

$$t_y = \frac{T}{bZ}$$

☞ Remarque

La valeur (généralement maximale) de la contrainte de cisaillement au niveau du centre de gravité est supérieure à celle qui résulterait de l'hypothèse selon laquelle la contrainte serait uniforme tout le long de la section. Dans ce dernier cas, on aurait en effet $t = T/S$, qui est généralement inférieur à T/bZ .

6.3. ÉTUDE DE QUELQUES SECTIONS PARTICULIÈRES

6.3.1. SECTION RECTANGULAIRE DE HAUTEUR $2h$ ET DE LARGEUR b

Pour cette section, les caractéristiques I , m et t_y sont :

$$I = \frac{2}{3}bh^3$$

$$m = \frac{b}{2}(h^2 - y^2)$$

$$t_y = \frac{3T(h^2 - y^2)}{4bh^3}$$

En introduisant l'aire de la section : $S = 2bh$, on a

$$t_y = \frac{3}{2} \frac{T}{S} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right)$$

La répartition de la contrainte de cisaillement sur la hauteur de la section suit une loi parabolique (figure 6.8), et le maximum, obtenu pour $y = 0$, est égal à 1,5 fois la contrainte *moyenne* T/S .

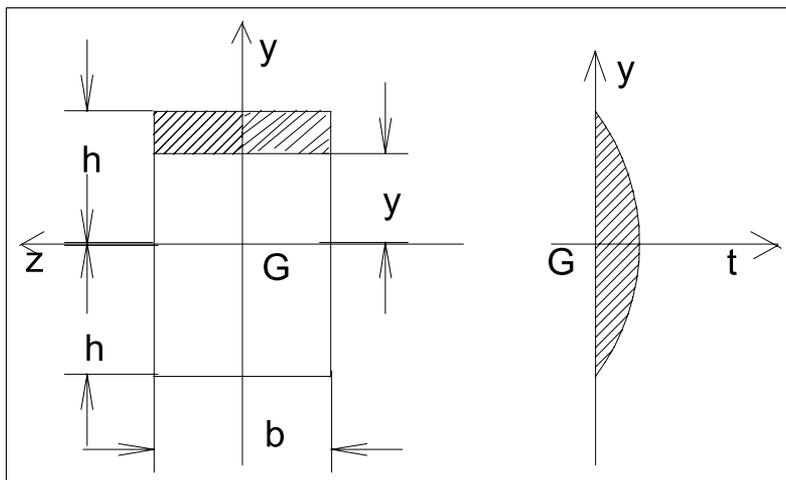


Figure 6.8. Répartition des contraintes de cisaillement dans une section rectangulaire.

6.3.2. SECTION CIRCULAIRE DE RAYON R

La contrainte de cisaillement est définie par :

$$t_y = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right)$$

La répartition des contraintes sur la hauteur de la section est parabolique, le maximum, obtenu pour $y = 0$, étant les quatre tiers de la contrainte moyenne.

6.3.3. SECTION EN DOUBLE-TÉ SYMÉTRIQUE PAR RAPPORT À L'AXE G_z

Désignons par s , la section de l'âme, s' , la section d'une membrure, λ , le rapport s/s' .

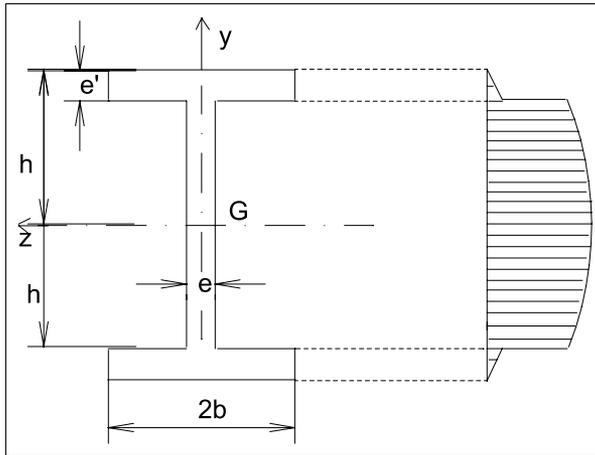


Figure 6.9. Répartition des contraintes de cisaillement dans une section en double-té.

Si e et e' sont petits devant h et b , c'est-à-dire si les termes de degré supérieur ou égal à 2 sont négligés, les résultats suivants sont obtenus : la contrainte de cisaillement est maximale au niveau du centre de gravité (figure 6.9) et a pour valeur :

$$t = \frac{T}{s} \frac{1 + \lambda/4}{1 + \lambda/6} = k \frac{T}{s}$$

Le coefficient k a pour valeur 1,045 pour $\lambda = 0,6$ et 1,031 pour $\lambda = 0,4$.

Dans la mesure où la contrainte de cisaillement diminue légèrement du centre vers les membrures, il résulte que l'on a, sur toute la hauteur de l'âme, avec une bonne approximation ($< 4\%$), d'autant meilleure que $\lambda = s/s'$ est petit :

$$t \approx \frac{T}{S}$$

On peut donc effectuer le calcul comme si l'âme seule supportait l'effort tranchant.

☞ Remarque

Seule la contrainte t_y a été prise en compte. Or, nous avons vu, à la fin du § 6.1, que la contrainte de cisaillement devait être parallèle au contour de la section. Dans le cas de profils de faible épaisseur, il est admis que la contrainte est répartie *uniformément* sur l'épaisseur. Dans les membrures, la contrainte devient donc négligeable, tandis que se développe une contrainte t_z . On calcule cette contrainte en effectuant une coupure C normale au contour (figure 6.10). Si e' désigne l'épaisseur de la membrure, m le moment statique de l'aire hachurée, I le moment d'inertie de la section *totale* par rapport à l'axe Gz , la contrainte de cisaillement est définie par :

$$t_z = \frac{Tm}{Ie'}$$

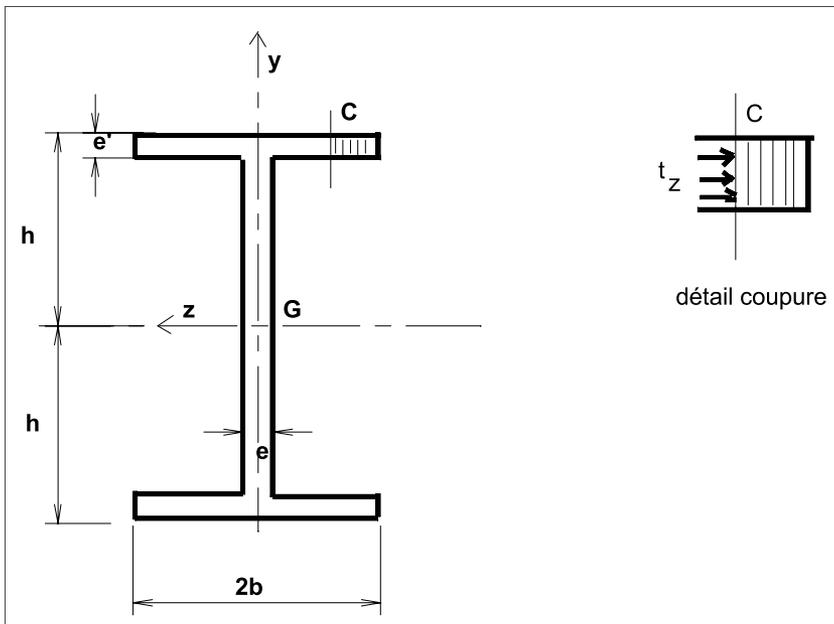


Figure 6.10. Contrainte de cisaillement dans une membrure.

6.4. EXERCICES

6.4.1. ÉTUDE D'UNE POUTRE DE SECTION RECTANGULAIRE

☞ Énoncé

Considérons une poutre de section rectangulaire de hauteur 1 m et de largeur 0,50 m. Cette poutre, de longueur 10 m, est placée à ses extrémités sur des appuis simples A et B.

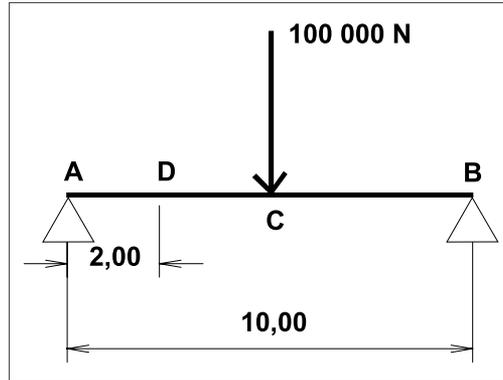


Figure 6.11. Schéma d'étude.

Sachant qu'elle supporte en son milieu C une charge concentrée de 100 000 N, calculez, au point D d'abscisse 2,00 m par rapport à A (figure 6.11) :

- la contrainte maximale de compression σ . Tracez le diagramme des contraintes,
- le bras de levier Z du couple élastique,
- la contrainte maximale de cisaillement t . On négligera volontairement le poids propre de la poutre.

➡ Solution

Dans un premier temps, il faut calculer les réactions d'appui; le point C étant au milieu de AB, les réactions sont égales à la moitié de la charge, soit 50 000 N.

Le moment fléchissant en D est égal au moment de la seule force à gauche, la réaction en A, soit $M = 50\,000 \times 2 = 100\,000$ mN.

L'effort tranchant est égal à la réaction en A, soit $T = 50\,000$ N.

Le moment d'inertie de la section est $I = bh^3/12 = 0,50/12$ m⁴.

- La contrainte normale est donnée par la formule $\sigma = M/I \cdot y$. Elle est nulle en G et maximale aux bords supérieur et inférieur de la poutre. La contrainte maximale de compression est donc

$$\sigma = \frac{100\,000}{0,50/12} \times 0,50 = 1\,200\,000 \text{ Pa} = 1,2 \text{ MPa}$$

Le diagramme des contraintes est ainsi formé de deux triangles égaux, de sommet G et de base 1,2 MPa (figure 6.12, page suivante).

- Les forces élastiques \vec{F} de compression et de traction passent par le centre de gravité de chaque triangle. Le bras de levier du couple élastique est donc égal à $2/3h$, soit $Z = 2/3m$.
- La contrainte maximale de cisaillement est :

$$t = \frac{T}{bZ} = \frac{50\,000}{0,50 \times 2/3} = 150\,000 \text{ Pa} = 0,15 \text{ MPa}$$

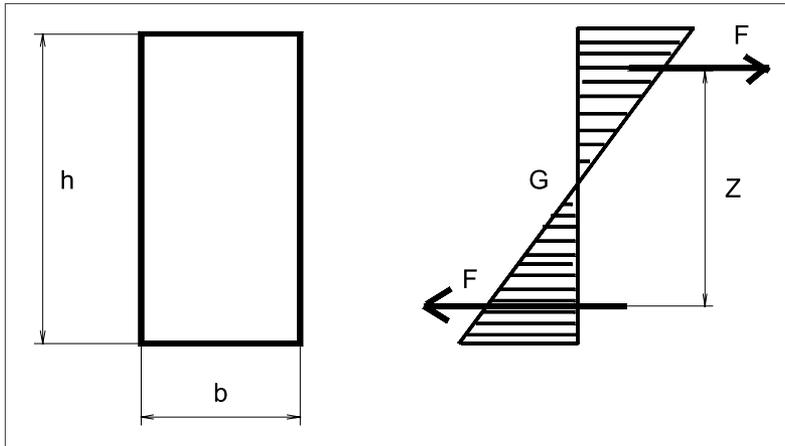


Figure 6.12.

👁 Remarque

Vérifions que la contrainte maximale de cisaillement est bien égale à 1,5 fois la contrainte moyenne :

$$\frac{T}{S} = \frac{50\,000}{1 \times 0,50} = 100\,000 \text{ Pa}$$

6.4.2. POUTRE DE SECTION RECTANGULAIRE. AUTRE SECTION

➡ Énoncé

Même exercice en considérant un point D d'abscisse 4,00 m par rapport à A.

➡ Solution

Le moment fléchissant devient : $M = 200\,000 \text{ mN}$.

L'effort tranchant reste constant : $T = 50\,000 \text{ N}$.

- La contrainte maximale de compression, proportionnelle à M , double également et devient égale à 2,4 MPa.
- Le diagramme des contraintes est toujours formé de triangles égaux opposés par le sommet : Z reste égal à $2/3h = 2/3 \text{ m}$.
- T , Z et b n'ayant pas varié, t reste égal à $1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Contraintes engendrées par le moment de torsion

7

7.1. RÉSULTATS DE LA THÉORIE DE LA TORSION

La théorie élémentaire de la torsion donnant des résultats inexacts et la théorie correcte étant très compliquée, nous nous bornerons à donner les résultats de cette dernière théorie relatifs à des sections simples : elliptique et rectangulaire.

Rappelons que le moment de torsion est un moment qui tend à faire tourner chaque section dans son propre plan (figure 7.1, page suivante).

En réalité, contrairement à ce que suppose la théorie élémentaire, les sections ne restent en général pas planes lors de la déformation, ce qui complique les résultats.

Les contraintes produites sont *uniquement des contraintes de cisaillement*.

7.1.1. SECTION ELLIPTIQUE

Considérons C la valeur du moment de torsion. Les composantes de la contrainte de cisaillement en un point M , de coordonnées y et z (figure 7.2, page suivante), sont :

$$t_z = -\frac{2Cz}{\pi ab^3} \quad t_y = \frac{2Cy}{\pi a^3 b}$$

Il en résulte que, si P est un point du contour :

- en un point M de GP , la contrainte de cisaillement est parallèle à la tangente en P au contour,
- le long de GP , la contrainte maximale de cisaillement est produite à l'extrémité du petit axe et a pour valeur :

$$t_m = \frac{-2C}{\pi ab^2}$$

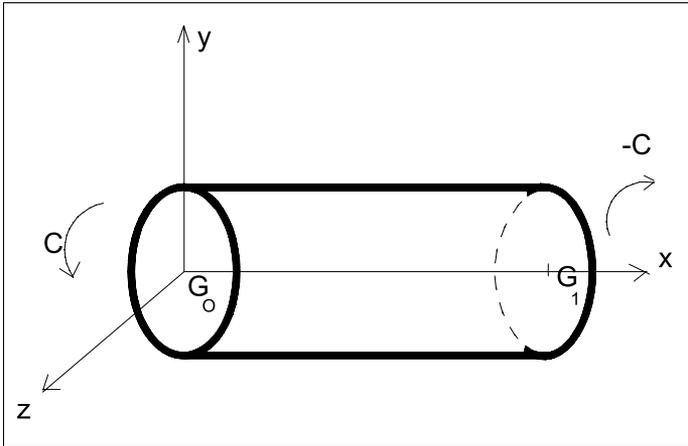


Figure 7.1. Pièce cylindrique soumise à un couple de torsion.

7.1.2. SECTION CIRCULAIRE

Il suffit de remarquer qu'une section circulaire n'est qu'une section elliptique particulière, c'est-à-dire que $a = b$. Ainsi, à partir des résultats précédents, on obtient :

$$t_z = \frac{-2Cz}{\pi R^4} \quad t_y = \frac{2Cy}{\pi R^4}$$

De plus, on démontre qu'une section plane reste plane après déformation.

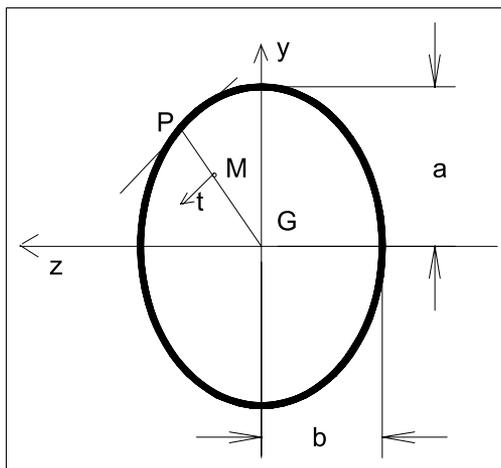


Figure 7.2. Section elliptique.

7.1.3. SECTION RECTANGULAIRE

Les résultats de la théorie sont très complexes. Nous nous bornerons au cas d'un rectangle très étroit, de hauteur b et d'épaisseur e (e étant très petit devant b).

La contrainte de cisaillement maximale est définie par :

$$t = \frac{C}{\frac{1}{3}be^2} = \frac{3C}{be^2}$$

C est le moment de torsion.

7.2. EXERCICES

7.2.1. ÉTUDE D'UN BARREAU CIRCULAIRE

Énoncé

Considérons un barreau circulaire de 100 mm de diamètre dont l'extrémité A est bloquée ; on serre une clé à l'extrémité B et on applique à l'extrémité de cette clé, de bras de levier $d = 200$ mm, une force $F = 10\,000$ N, qui produit un couple de torsion. À l'extrémité A se forme un couple de réaction égal et opposé au couple de torsion (figure 7.3).

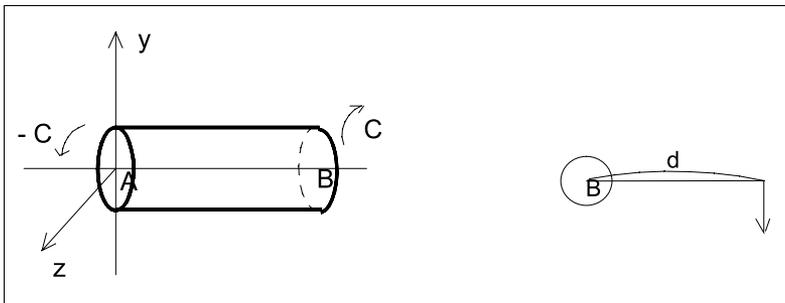


Figure 7.3. Torsion d'un barreau circulaire.

Calculez la contrainte de cisaillement dans une section quelconque :

1. au centre de gravité de la section ;
2. en un point du pourtour de la section.

➡ Solution

Calculons d'abord le couple de torsion : $C = F \times d = 10\,000 \text{ N} \times 0,2 = 2\,000 \text{ m} \cdot \text{N}$.

On en déduit immédiatement les contraintes de cisaillement :

1. au centre de gravité (c'est-à-dire sur l'axe longitudinal du barreau), $y = 0$ et $z = 0$, d'où $t = 0$, ce qui est normal puisque la torsion s'effectue autour de cet axe.
2. sur le pourtour, on a :

$$t_y = \frac{2Cy}{\pi R^4} \quad \text{et} \quad t_z = \frac{-2Cz}{\pi R^4}$$

d'où :

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{t_y^2 + t_z^2} = \frac{2C}{\pi R^4} \sqrt{y^2 + z^2} \\ &= \frac{2C}{\pi R^4} \times R = \frac{2C}{\pi R^3} = \frac{4\,000}{\pi (0,05)^3} = 10,2 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 10,2 \text{ MPa} \end{aligned}$$

7.2.2. ÉTUDE D'UNE TÔLE D'ACIER

➡ Énoncé

Considérons une tôle d'acier de 10 mm d'épaisseur et de 1 m de largeur, dont les extrémités A et B sont soumises à des forces égales et opposées (figure 7.4).

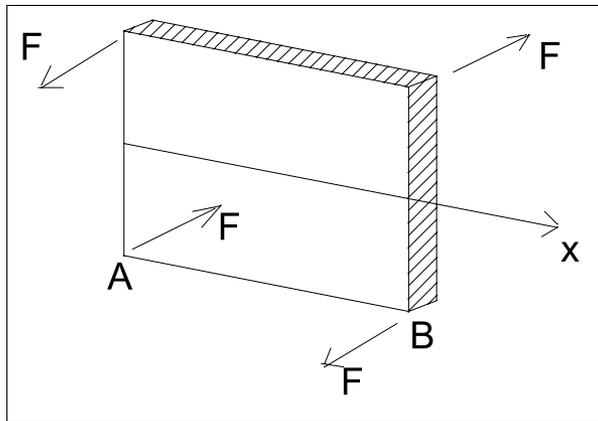


Figure 7.4. Torsion d'une tôle d'acier.

Calculez la contrainte maximale de cisaillement dans la tôle, avec $F = 1\,000 \text{ N}$.

➡ Solution

Le couple est $C = 1\,000 \text{ N} \times 1 \text{ m} = 1\,000 \text{ Nm}$.

La contrainte maximale de cisaillement est :

$$t = \frac{1\,000 \times 3}{1 \times 0,01^2} = 3 \cdot 10^7 \text{ Pa} = 30 \text{ MPa}$$

Poutres droites isostatiques

8

8.1. POUTRES SUR APPUIS SIMPLES

8.1.1. DÉFINITION

Une poutre sur appuis simples, appelée encore poutre à *travée indépendante*, est une poutre droite reposant sur deux appuis simples, susceptibles de ne développer que deux réactions R_A et R_B normales à la fibre moyenne de la poutre (figure 8.1).

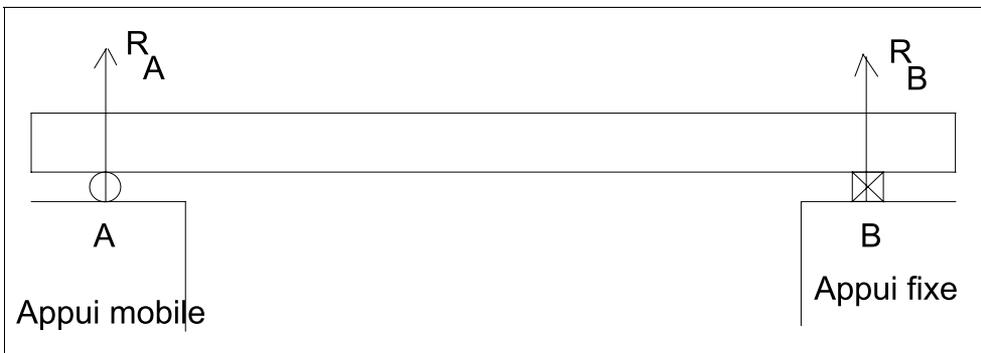


Figure 8.1. Poutre comportant un appui fixe et un appui mobile.

Ces appuis sont généralement constitués de plaques de Néoprène⁽¹⁾, qui, moyennant une épaisseur convenable, peuvent supporter, par leur déformation propre, les déplacements des extrémités de poutre dus à la dilatation (fig. 8.2).

1. Matériau très élastique ressemblant un peu au caoutchouc.

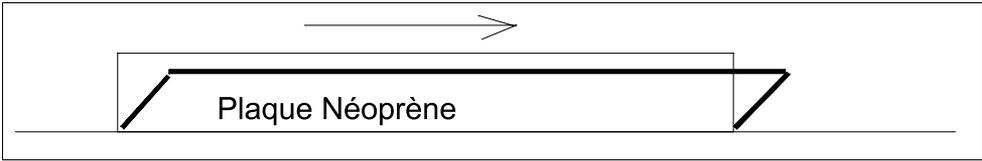


Figure 8.2. Appui par plaque Néoprène.

Les forces appliquées à la poutre sont des forces verticales (poids).

8.1.2. CALCUL DES EFFORTS ET DES MOMENTS SOUS UNE CHARGE CONCENTRÉE - LIGNES D'INFLUENCE

8.1.2.1. Calcul des efforts et des moments

Plaçons l'origine des abscisses à l'appui de gauche A, et supposons qu'une seule charge concentrée \bar{P} soit appliquée dans la section (C), à l'abscisse a (figure 8.3).

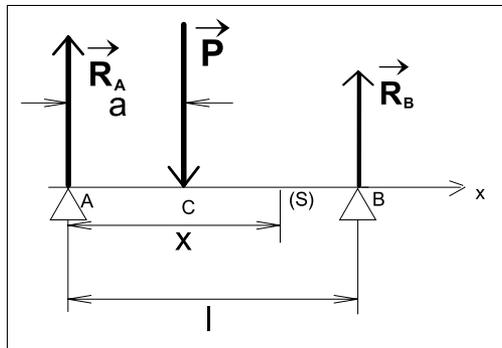


Figure 8.3. Poutre à travée indépendante soumise à une force concentrée \bar{P} .

Les réactions \bar{R}_A et \bar{R}_B sont calculées comme indiqué au paragraphe 4.2.3, c'est-à-dire :

$$R_A = P\left(1 - \frac{a}{\ell}\right) \text{ et } R_B = P\frac{a}{\ell}$$

L'effort tranchant et le moment fléchissant sont définis par (cf. § 4.3.3) :

$$T = \begin{cases} P\left(1 - \frac{a}{\ell}\right) & \text{si } x < a \\ -P\frac{a}{\ell} & \text{si } x > a \end{cases} \quad M = \begin{cases} P\frac{x(\ell - a)}{\ell} & \text{si } x < a \\ P\frac{a(\ell - x)}{\ell} & \text{si } x > a \end{cases}$$

En faisant varier x , a restant constant, les *lignes représentatives* de la figure 8.4, page ci-contre, sont obtenues.

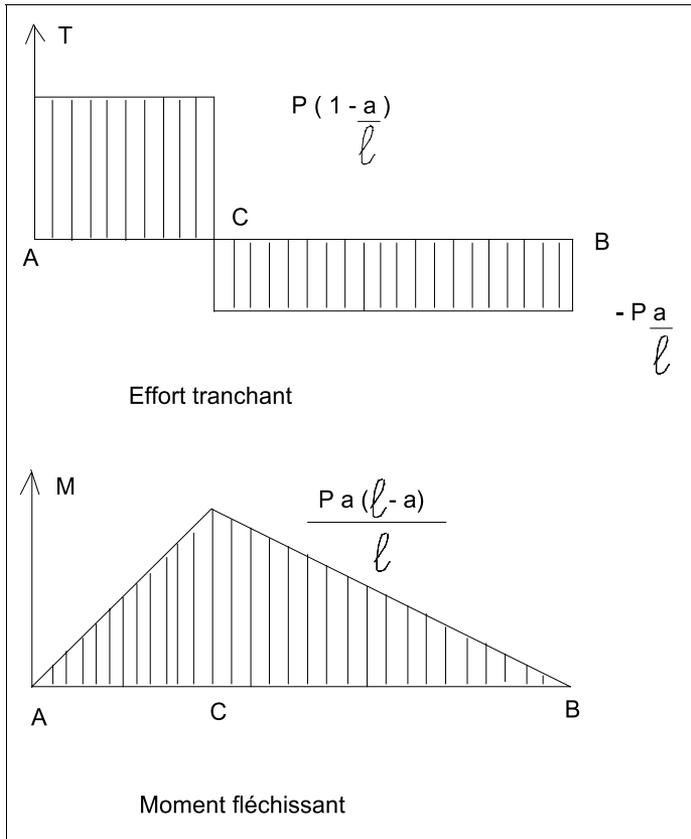


Figure 8.4. Lignes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

8.1.2.2. Lignes d'influence

Considérons une charge *unité* verticale, pouvant se déplacer le long de la poutre. On se trouve ainsi dans le cas précédent où $P = 1$ et où a est variable, non plus constant.

Cette charge *unité* produit un certain nombre d'*effets élastiques* tels que moment fléchissant, effort tranchant, réactions d'appui, etc.

On appelle *fonction d'influence* d'un effet élastique, la fonction $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a)$ représentant la variation de l'effet élastique en fonction de l'abscisse de la charge unité.

La courbe représentative de la fonction $\mathcal{F}(a)$ est appelée *ligne d'influence* de l'effet élastique considéré.

- **Ligne d'influence de la réaction R_A**

On a : $R_A = 1(1 - \frac{a}{\ell})$ puisque $P = 1$

La fonction d'influence est donc :

$$\mathcal{F}(a) = \left(1 - \frac{a}{\ell}\right), a \text{ variant de } 0 \text{ à } \ell$$

La ligne d'influence est donc une droite passant par les points A(0,1) et B(ℓ,0) (figure 8.5).

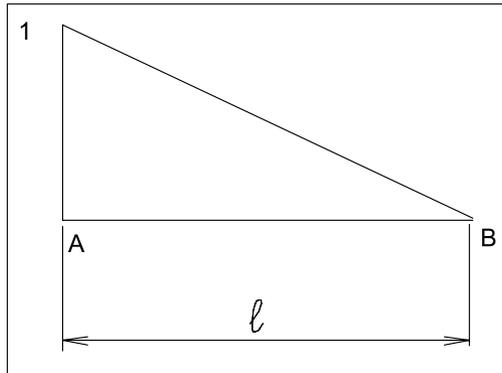


Figure 8.5. Ligne d'influence de la réaction \bar{R}_A .

• **Ligne d'influence de l'effort tranchant dans une section d'abscisse x**

Nous avons :

$$T = \begin{cases} 1 - \frac{a}{\ell} & \text{si } a > x \\ -\frac{a}{\ell} & \text{si } a < x \end{cases}$$

Rappelons que dans le cas de la ligne d'influence, x est constant et a est variable.

La ligne d'influence se compose de deux segments de droites parallèles.

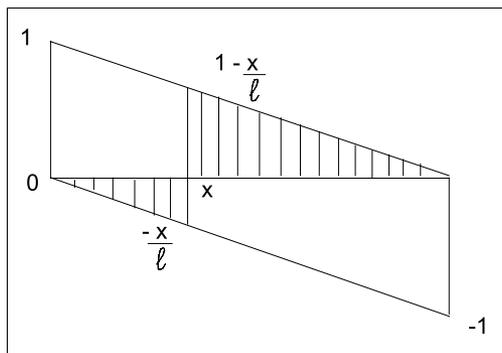


Figure 8.6. Ligne d'influence de l'effort tranchant.

D'après la figure 8.6, il est très facile d'obtenir la ligne d'influence de l'effort tranchant dans une section d'abscisse x quelconque.

• **Ligne d'influence du moment fléchissant dans une section d'abscisse x**

Nous avons :

$$M = \begin{cases} \frac{x(l-a)}{l} & \text{si } a > x \\ \frac{a}{l}(l-x) & \text{si } a < x \end{cases}$$

La ligne d'influence se compose de deux segments de droites (figure 8.7).

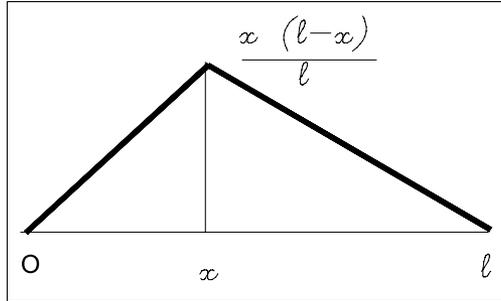


Figure 8.7. Ligne d'influence du moment fléchissant.

Dans ces trois exemples on obtient la valeur de l'effet, dans une section d'abscisse x , d'une force *unité* placée dans une section d'abscisse a , en considérant l'ordonnée de la ligne d'influence correspondant à la section d'abscisse a .

Si, au lieu d'une force unité une force d'intensité P était appliquée, on obtiendrait l'effet correspondant en multipliant par P la valeur de l'ordonnée précédente.

8.1.3. SYSTÈMES DE CHARGES CONCENTRÉES :
PRINCIPE DE SUPERPOSITION DES CHARGES
- EFFET D'UN CONVOI - THÉORÈME DE BARRÉ

8.1.3.1. Systèmes de charges concentrées :
principe de superposition des charges

Les lignes d'influences, traitées dans le précédent paragraphe, sont utiles pour effectuer un calcul intermédiaire lors de l'étude des systèmes de charges concentrées.

Considérons une poutre soumise à un système de charges concentrées, au nombre de trois, ayant les caractéristiques suivantes (figure 8.8, page suivante) :

- P_1 appliquée à l'abscisse a_1 ,
- P_2 appliquée à l'abscisse a_2 ,
- P_3 appliquée à l'abscisse a_3

Le calcul de l'effet de ces trois charges peut s'effectuer selon la méthode développée dans les chapitres précédents pour la détermination du moment fléchissant, de l'effort tranchant, des diverses contraintes, etc.

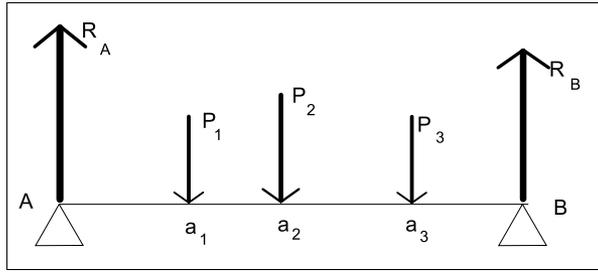


Figure 8.8. Poutre chargée de charges concentrées.

En particulier, les résultats fondamentaux suivants ont été obtenus :

- d’une part, les contraintes (normales ou tangentielles), sont toujours proportionnelles au moment fléchissant, à l’effort tranchant ou au moment de torsion,
- d’autre part, ces moments et efforts sont eux-mêmes proportionnels aux forces agissant sur les pièces étudiées.

Donc si donc une force extérieure \vec{F} produit une réaction \vec{R} , un moment \vec{M} et un effort tranchant \vec{T} et une autre force extérieure \vec{F}' produit une réaction \vec{R}' , un moment \vec{M}' et un effort tranchant \vec{T}' , le système de forces $(\vec{F} + \vec{F}')$ produira une réaction $(\vec{R} + \vec{R}')$, un moment $(\vec{M} + \vec{M}')$ et un effort tranchant $(\vec{T} + \vec{T}')$, sous réserve que le matériau ne subisse pas des contraintes supérieures à celles qu’il est susceptible de supporter.

Ce résultat, applicable aux forces concentrées, l’est également pour les charges réparties, celles-ci pouvant être considérées comme une somme de charges concentrées infiniment rapprochées.

Ce résultat porte le nom de *principe de superposition des charges*, ou encore parfois *principe de superposition des états d’équilibre*, en tenant compte de la remarque ci-dessus concernant le non dépassement des contraintes admissibles.

Pour le cas particulier qui nous intéresse, il est facile de calculer la réaction \vec{R}_A , par exemple, à partir de la ligne d’influence, en la considérant comme la somme des réactions correspondant à chacune des charges concentrées.

En appliquant la formule concernant la ligne d’influence de la réaction d’appui déterminée ci-dessus, nous obtenons immédiatement :

$$R_A = \frac{[P_1(\ell - a_1) + P_2(\ell - a_2) + P_3(\ell - a_3)]}{\ell}$$

Pour le calcul de l’effort tranchant, constant dans tout l’intervalle limité par le point d’application de deux charges consécutives, il suffit de connaître sa valeur en un point de chaque intervalle $[Oa_j]$.

Pour le calcul du moment fléchissant, l’effort tranchant étant constant par intervalles, le moment fléchissant est représenté par des segments de droites dans ces intervalles. Sa ligne représentative est une ligne brisée dont les sommets se situent au droit des points d’application des charges : il suffit donc de connaître les valeurs du moment fléchissant aux abscisses a_1, a_2 et a_3 .

Les détails des calculs sont donnés dans le tableau 8.1. La vérification de l'exactitude des calculs se fait en trouvant $M(\ell) = 0$.

Abcisses	Charges	Efforts tranchants	Moments fléchissants
0	-	$T_0 = R_0 =$ $\frac{1}{\ell} (P_1(\ell - a_1) + P_2(\ell - a_2) + P_3(\ell - a_3))$	$M_0 = 0$
a_1	P_1	$T_1 = T_0 - P_1 =$ $\frac{1}{\ell} (-P_1 a_1 + P_2(\ell - a_2) + P_3(\ell - a_3))$	$M_1 = M_0 + T_0 a_1 =$ $\frac{a_1}{\ell} (P_1(\ell - a_1) + P_2(\ell - a_2) + P_3(\ell - a_3))$
a_2	P_2	$T_2 = T_1 - P_2 =$ $\frac{1}{\ell} (-P_1 a_1 - P_2 a_2 + P_3(\ell - a_3))$	$M_2 = M_1 + T_1(a_2 - a_1) =$ $\frac{1}{\ell} (P_1 a_1(\ell - a_2) + P_2 a_2(\ell - a_2) + P_3 a_2(\ell - a_3))$
a_3	P_3	$T_3 = T_2 - P_3 = -R_\ell =$ $-\frac{1}{\ell} (P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3)$	$M_3 = M_2 + T_2(a_3 - a_2) =$ $\frac{\ell - a_3}{\ell} (P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3)$
ℓ	-	$T_\ell = T_3$	$M_\ell = M_3 + T_3(\ell - a_3) = 0$

Tableau 8.1. Effort tranchant et moment fléchissant selon l'abscisse.

Il est possible d'effectuer le même calcul à partir des lignes d'influence. Pour cela, traçons la ligne d'influence du moment fléchissant dans la section d'abscisse a_1 (figure 8.9).

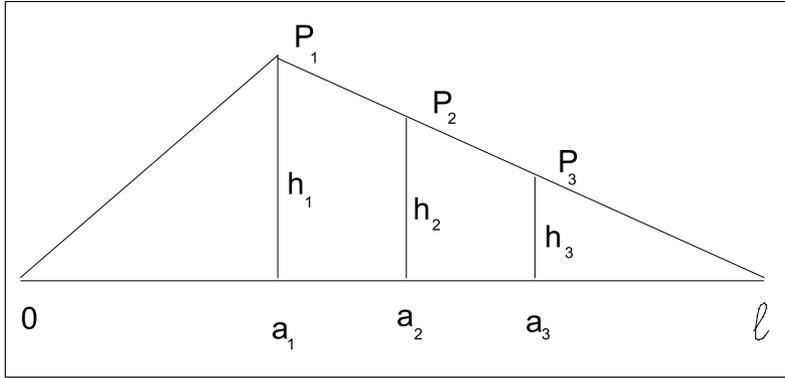


Figure 8.9. Ligne d'influence du moment fléchissant à l'abscisse a_1 .

Le moment fléchissant du système de forces \bar{P}_1 , \bar{P}_2 et \bar{P}_3 est égal à $P_1 \times h_1 + P_2 \times h_2 + P_3 \times h_3$, h_i représentant le moment fléchissant, en a_i , de la force unité placée en a_i .

Nous savons que :

$$h_1 = a_1 \frac{\ell - a_1}{\ell}$$

Or, dans les triangles semblables, l'application du théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\ell - a_2}{\ell - a_1}, \text{ d'où } h_2 = h_1 \frac{\ell - a_2}{\ell - a_1} \text{ et, de même, } h_3 = h_1 \frac{\ell - a_3}{\ell - a_1}$$

Finalement, le moment fléchissant est égal à :

$$M_1 = \frac{a_1}{\ell} (P_1(\ell - a_1) + P_2(\ell - a_2) + P_3(\ell - a_3))$$

Le tracé de la ligne d'influence du moment fléchissant dans la section d'abscisse a_2 est donné à la figure 8.10, page suivante.

On sait que $M_1 = P_1 h_1 + P_2 h_2 + P_3 h_3$. En refaisant le calcul précédent, on obtient :

$$h_2 = a_2 \frac{\ell - a_2}{\ell}; \quad h_1 = a_1 \frac{\ell - a_2}{\ell}; \quad h_3 = a_2 \frac{\ell - a_3}{\ell}$$

Ce qui permet de retrouver le résultat donné dans le tableau tableau 8.1, page précédente :

$$M_2 = \frac{1}{\ell} (P_1 a_1 (\ell - a_2) + P_2 a_2 (\ell - a_2) + P_3 a_2 (\ell - a_3))$$

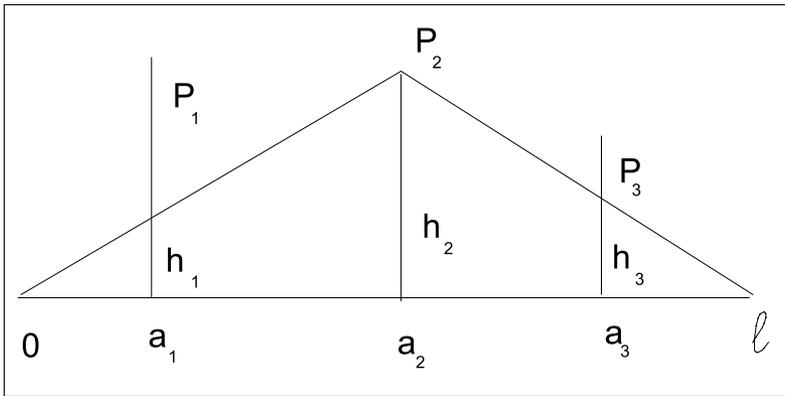


Figure 8.10. Ligne d'influence du moment fléchissant à l'abscisse a_2 .

La valeur de M_3 donnée dans le tableau peut être calculée de la même manière.

En conclusion, le calcul par les lignes d'influence est beaucoup plus rapide que le calcul direct, notamment grâce au fait qu'il ne nécessite pas le calcul des réactions d'appui.

De plus, cette méthode offre la possibilité de mesurer *graphiquement* les différentes valeurs de h , à condition que l'échelle soit choisie de sorte que l'erreur de lecture soit acceptable.

Une image des lignes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant est également donnée (figure 8.11 et figure 8.12, page suivante).

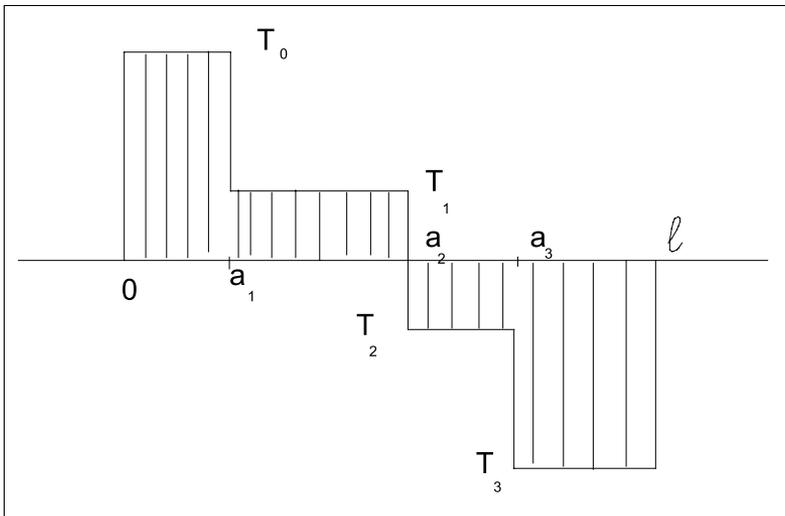


Figure 8.11. Ligne représentative de l'effort tranchant.

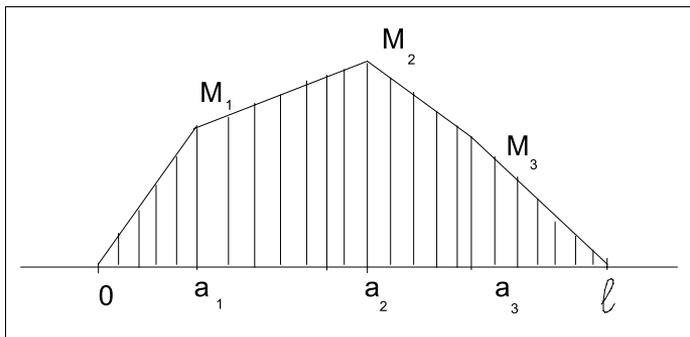


Figure 8.12. Ligne représentative du moment fléchissant.

8.1.3.2. Effet d'un convoi - Théorème de Barré

Un convoi est un système de charges concentrées pouvant se déplacer dans leur ensemble, les distances entre les lignes d'action des différentes charges restant invariables au cours du déplacement. C'est le cas des essieux d'un camion ou d'un train.

Pour déterminer l'effort tranchant \bar{T} ou le moment fléchissant \bar{M} , maximaux dans une section de poutre, sous l'action du convoi, on utilise les lignes d'influence correspondantes dans cette section et on déplace le convoi (dessiné sur papier transparent) le long de la ligne d'influence, jusqu'à l'obtention du maximum de l'effet considéré. Dans une position donnée du convoi, \bar{T} et \bar{M} s'obtiennent en faisant la somme des produits des charges ⁽²⁾. Il faut avoir soin, lorsque le convoi n'est pas symétrique, de le retourner bout pour bout, c'est-à-dire symétriquement par rapport à un axe vertical.

Un essieu doit toujours se trouver dans la section considérée pour obtenir le maximum recherché.

On peut se contenter de déterminer les valeurs maximales de \bar{T} et \bar{M} dans un certain nombre de sections de la poutre, et de tracer les lignes enveloppes (cf. § 8.1.5), mais il est également intéressant de déterminer les maxima absolus de l'effort tranchant et du moment fléchissant dans l'ensemble de la poutre.

Aucune difficulté pour l'effort tranchant puisque le maximum absolu se situe dans les sections extrêmes de la poutre.

La méthode pour déterminer le moment fléchissant est donnée par le *théorème de Barré*, ci-après : **le moment fléchissant est maximum au droit d'un essieu lorsque cet essieu et la résultante générale du convoi se trouvent dans des sections symétriques par rapport au milieu de la poutre.**

2. Cf. le calcul fait à la fin du paragraphe précédent.

Il ne faut évidemment considérer que la résultante des essieux du convoi qui se trouvent *effectivement* sur la poutre. C'est le cas d'un convoi plus long que la poutre considérée.

Généralement, le maximum absolu se situe au droit de l'un des essieux les plus voisins de la résultante générale R (figure 8.13), mais ce n'est pas toujours vrai ; il est préférable de le vérifier.

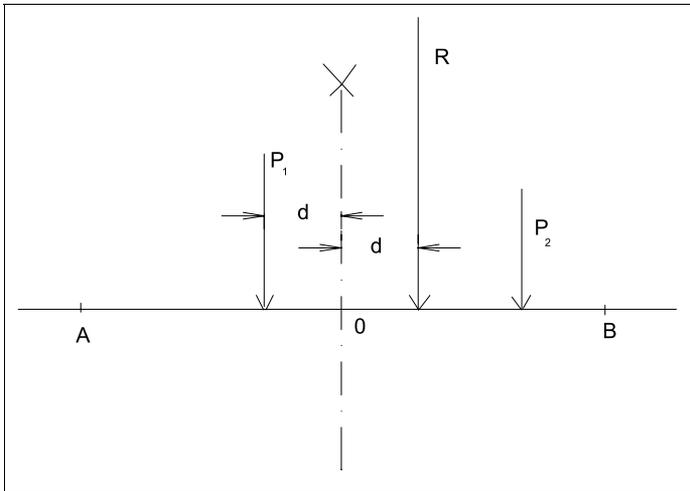


Figure 8.13. Position des charges pour obtenir le moment fléchissant maximum.

8.1.4. CAS DE CHARGES RÉPARTIES

De telles charges peuvent être :

- soit réparties uniformément,
- soit réparties d'une façon quelconque (figure 8.14).

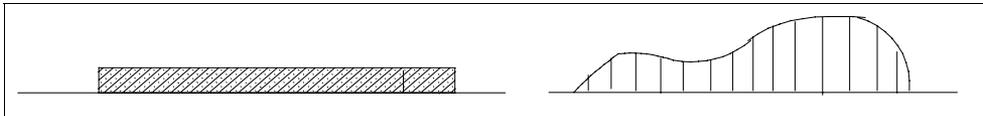


Figure 8.14. Charges réparties uniformément ou d'une façon quelconque.

Par la suite ne sont considérées que des charges uniformément réparties, de densité p , p étant exprimé généralement en newtons par mètre (N/m).

Il est toujours possible de décomposer une charge quelconque en somme de charges uniformément réparties en considérant des distances d'application infiniment petites.

La charge totale uniformément répartie sur une poutre de longueur ℓ est $p\ell$. Les deux réactions R_A et R_B valent $p \cdot \ell / 2$ (figure 8.15, page suivante).

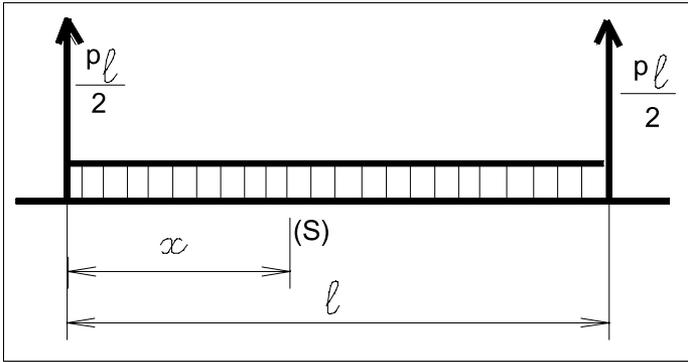


Figure 8.15. Poutre sur appuis simples supportant une charge uniformément répartie.

L'effort tranchant vaut : $T = \frac{pl}{2} - px = p(\frac{l}{2} - x)$, quel que soit x .

Le moment fléchissant est égal au moment de la réaction \bar{R}_A par rapport à la section (S) considérée, diminué du moment de la charge répartie comprise entre A et S. Pour calculer ce dernier moment, on considère que la charge répartie est représentée par sa résultante px placée au centre de gravité, c'est-à-dire à la distance $x/2$.

$$\text{On a donc } M = \frac{pl}{2}x - px\frac{x}{2} = \frac{px}{2}(l - x)$$

On peut vérifier que l'effort tranchant est bien la dérivée du moment fléchissant par rapport à la variable x . Les lignes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant sont données sur la figure 8.16, page ci-contre. La ligne du moment fléchissant est un arc de parabole. La valeur maximale est obtenue au milieu de la poutre ; elle est égale à :

$$\frac{pl^2}{8} \quad (3)$$

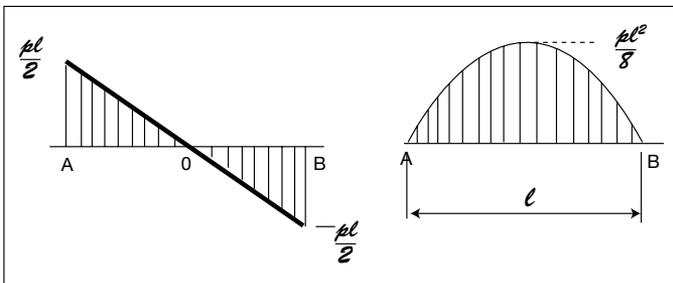


Figure 8.16. Lignes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

3. Valeur à retenir absolument.

Remarque

On pouvait trouver les valeurs de \bar{T} et \bar{M} à partir des lignes d'influence (cf. figure 8.17, page suivante). Pour l'effort tranchant, T est égal à la surface hachurée multipliée par la densité p .

$$T = px \frac{-x}{\ell} \frac{1}{2} + p \frac{1}{2} (\ell - x) \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) = p \left(\frac{\ell}{2} - x\right)$$

Il en est de même pour le moment fléchissant :

$$M = \frac{1}{2} pl \frac{x(\ell - x)}{\ell} = \frac{px}{2} (\ell - x)$$

Remarque

On pouvait trouver les valeurs de \bar{T} et \bar{M} à partir des lignes d'influence (cf. figure 8.17).

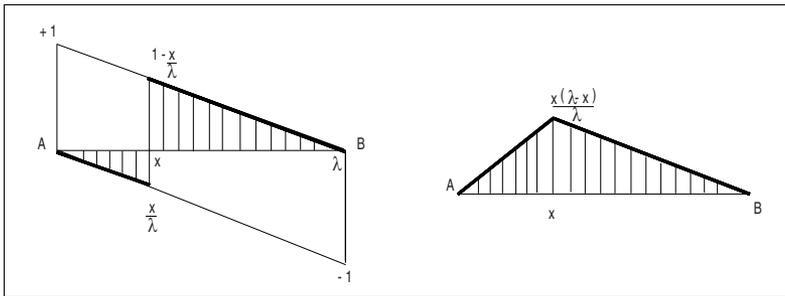


Figure 8.17. Lignes d'influence de l'effort tranchant du moment fléchissant.

Pour l'effort tranchant, T est égal à la surface hachurée multipliée par la densité p .

$$T = px \frac{-x}{\ell} \frac{1}{2} + p \frac{1}{2} (\ell - x) \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) = p \left(\frac{\ell}{2} - x\right)$$

Il en est de même pour le moment fléchissant :

$$M = \frac{1}{2} pl \frac{x(\ell - x)}{\ell} = \frac{px}{2} (\ell - x)$$

8.1.5. LIGNES ENVELOPPES

Sur une poutre, considérons un cas de charges quelconque (par exemple une charge uniformément répartie); si les contraintes, telles qu'elles résultent de l'effort tranchant, du moment fléchissant ou du moment de torsion, ne dépassent les contraintes admissibles, un *état d'équilibre* est atteint.

Tant que les contraintes restent acceptables, plusieurs cas de charges, correspondant à une superposition des différents états d'équilibre peuvent être superposés : le calcul des effets résultants se réduit alors à faire la somme algébrique des effets élémentaires.

Par exemple, le moment fléchissant au centre d'une poutre sur appuis simples supportant une charge concentrée \bar{P} , en son milieu et une charge uniformément répartie de densité p , est égal au moment de la charge concentrée $p\ell/4$ augmenté du moment de la charge répartie $p\ell^2/8$, soit :

$$M = \frac{P\ell}{4} + \frac{p\ell^2}{8}$$

Il faut également considérer le cas de charges pouvant se déplacer le long de la poutre (cas d'un convoi, par exemple). À chaque position possible des charges correspond, dans chaque section, un certain effet, et, pour l'ensemble de la poutre, une ligne représentative de cet effet.

On appelle *ligne enveloppe* de l'effet considéré, la ligne à l'intérieur de laquelle peuvent s'inscrire les lignes représentatives correspondant à tous les cas de charges possibles.

Prenons, par exemple, le cas d'une charge *concentrée* \bar{P} pouvant se déplacer sur la poutre (figure 8.18).

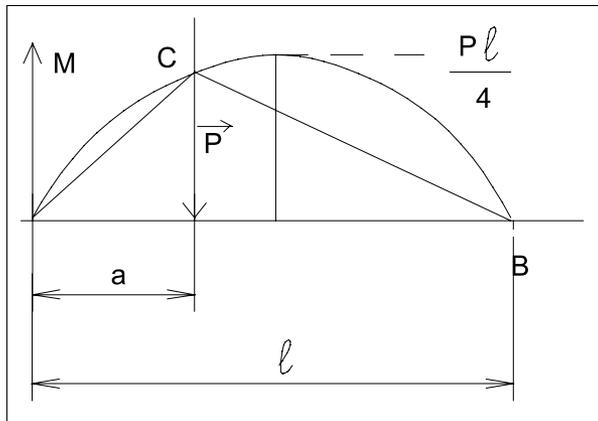


Figure 8.18. Ligne enveloppe du moment fléchissant dû à une charge concentrée.

À une position de la charge \bar{P} , d'abscisse a , correspond (cf. § 8.1.2.1) une ligne représentative du moment : ACB, les coordonnées du point C étant :

$$\left| \begin{array}{c} a \\ \frac{Pa(\ell - a)}{\ell} \end{array} \right|$$

La ligne enveloppe est le lieu géométrique du maximum C, c'est-à-dire, en faisant varier a le long de AB, la parabole ayant pour équation :

$$M(a) = \frac{Pa(\ell - a)}{\ell}, \quad a \text{ variant de } 0 \text{ à } \ell.$$

Le maximum du moment se situe au sommet de la parabole, pour une position de la charge au milieu de la poutre ; sa valeur est $Pl/4$.

8.1.6. CALCUL DES FLÈCHES

Sous l'effet des sollicitations auxquelles elle est soumise, une poutre se déforme. Par exemple, une poutre initialement droite prend la forme donnée par la figure 8.19, page suivante.

On appelle flèche à l'abscisse x le déplacement vertical du centre de gravité de la section relative à cette abscisse. Les flèches sont comptées positivement si le déplacement s'effectue vers le haut (sens des forces positives).

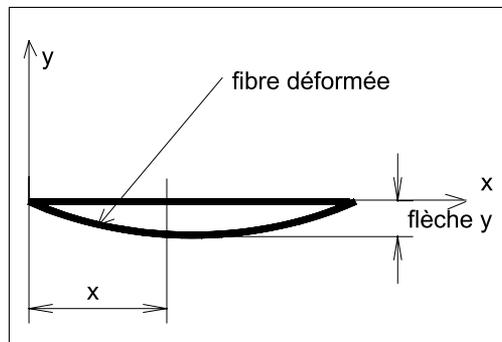


Figure 8.19. *Fibre déformée.*

Le nouveau lieu des centres de gravité des sections prend le nom de *fibre moyenne déformée* (ou, plus simplement, de *déformée*).

Dans cet ouvrage, nous nous contenterons d'indiquer l'équation de la déformée de la forme $y = f(x)$, y représentant la valeur algébrique de la flèche à l'abscisse x . La valeur y se calcule à partir de l'équation différentielle ⁽⁴⁾ :

$$y'' = \frac{M(x)}{EI} \quad (8.1)$$

- y'' est la dérivée seconde de y ;
- $M(x)$ est le moment fléchissant exprimé en fonction de l'abscisse x ;
- E est le module d'élasticité du matériau constitutif ;
- I est le moment d'inertie de la section considérée par rapport à l'axe passant par le centre de gravité, et normal au plan moyen de la poutre ⁽⁵⁾.

4. Du moins en première approximation, suffisante toutefois pour la plupart des cas en pratique.

5. I est le même que celui considéré dans le calcul des contraintes, au paragraphe 5.2 ; il peut être constant ou variable le long de la poutre.

Pour une charge concentrée \bar{P} située au milieu de la portée, et en supposant que le moment d'inertie est constant, y , au milieu de la poutre, a pour valeur :

$$y = \frac{-P\ell^3}{48EI}$$

En effet, le moment fléchissant M est égal à $Px/2$ entre A et C et à $P(\ell - x)/2$ entre C et B (figure 8.20, page suivante).

Entre A et C, $y'' = \frac{Px}{2EI}$ d'où $y' = y'_0 + \frac{P}{2EI} \frac{x^2}{2}$ et $y = y_0 + y'_0 x + \frac{P}{2EI} \frac{x^3}{6}$

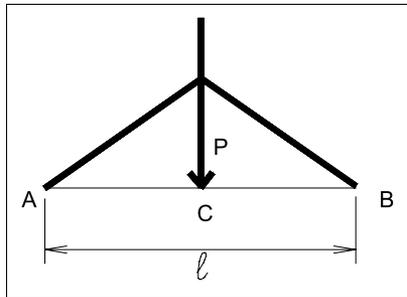


Figure 8.20. Ligne représentative du moment fléchissant au milieu C de la poutre.

La flèche étant nulle en A, cela entraîne $y_0 = 0$. D'autre part, la déformée est symétrique par rapport à l'axe vertical passant par le point C. Sa tangente est donc horizontale pour une abscisse $x = \ell/2$, d'où $y'(\ell/2) = 0$, ce qui entraîne :

$$y'_0 = -\frac{P\ell^2}{16EI}$$

On trouve ainsi $y = \frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{12} - \frac{\ell^2 x}{16} \right)$ soit pour $x = \frac{\ell}{2} \Rightarrow y\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{P\ell^3}{48EI}$

Pour une charge uniformément répartie de densité p , la flèche est maximale dans la section médiane et a pour valeur :

$$y = -\frac{5}{384} \frac{p\ell^4}{EI}$$

Remarque

Le rayon de courbure d'une poutre (cf. § 5.2.1), après déformation par flexion, est tel que $1/R = M/EI$, ce qui équivaut à $y'' = 1/R$.

Ainsi, on considère y' comme infiniment petit, et, d'autre part, la flèche due à l'effort tranchant est négligée. Cette hypothèse simplificatrice est valable dans la plupart des cas courants.

8.2. CONSOLES

8.2.1. DÉFINITION

Une console est une poutre droite encastree à son extrémité A et libre à l'autre extrémité (figure 8.21, page suivante). La longueur de la console est désignée par l et les sections sont définies par les abscisses comptées à partir de l'extrémité encastree A.

Il n'y a de réactions d'appui qu'à l'extrémité A. Elles comprennent une réaction verticale \vec{R}_A et un moment d'encastrement \vec{M}_A .

\vec{R}_A et \vec{M}_A peuvent être déterminés à l'aide de la statique élémentaire : la console est donc une poutre isostatique.

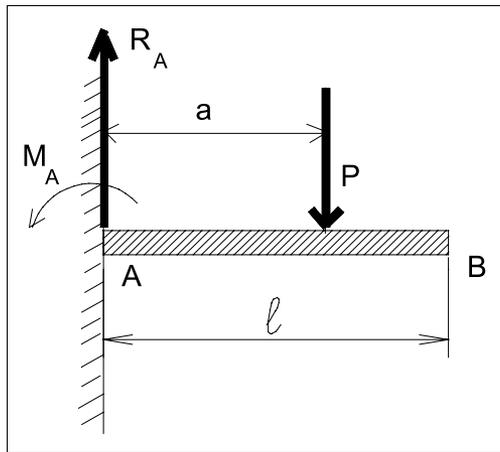


Figure 8.21. Charge concentrée sur une console.

8.2.2. DÉTERMINATION DE L'EFFORT TRANCHANT ET DU MOMENT FLÉCHISSANT SOUS UNE CHARGE CONCENTRÉE - LIGNE D'INFLUENCE

Considérons une console supportant une charge concentrée \vec{P} située à l'abscisse a (figure 8.22). Calculons d'abord les réactions d'appui à l'origine 0. La somme des

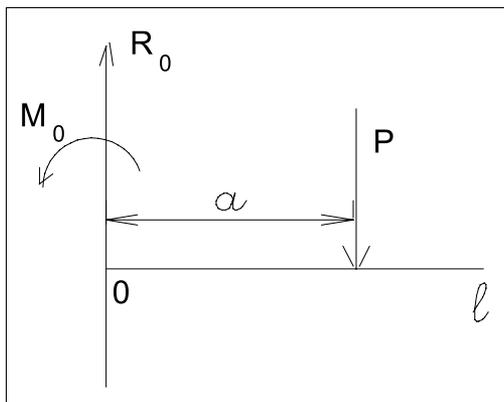


Figure 8.22. Console supportant une charge concentrée.

forces est nulle, donc : $R_0 - P = 0$, d'où : $\mathbf{R}_0 = \mathbf{P}$. La résultante des moments à l'origine est nulle, donc : $M_0 + a \cdot P = 0$ d'où $\mathbf{M}_0 = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}$.

Il en résulte que, dans la section d'abscisse x , l'effort tranchant et le moment fléchissant sont donnés par les expressions du tableau 8.2, page suivante.

Considérées comme fonction de x , les expressions ci-dessus permettent d'aboutir aux lignes représentatives données sur la figure 8.23, page suivante.

$x < a$	$x \geq a$
$T = P$	$T = 0$
$M = P(x - a)$	$M = 0$

Tableau 8.2. Effort tranchant et moment fléchissant d'une console.

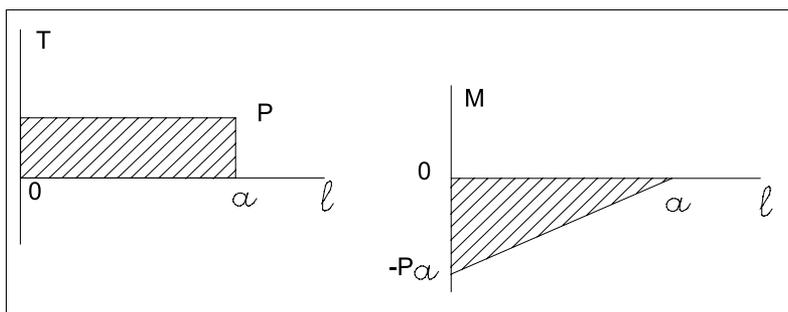


Figure 8.23. Lignes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

Considérées comme fonctions de a , elles aboutissent aux lignes d'influence (figure 8.24).

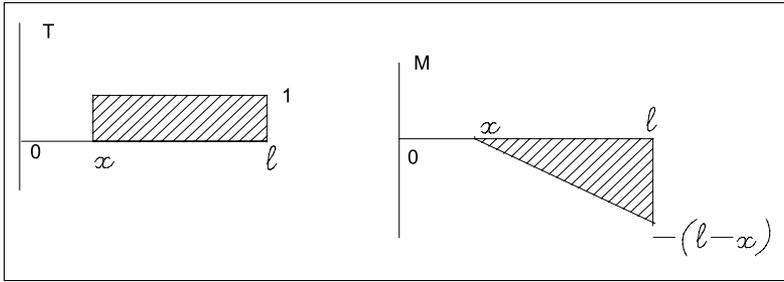


Figure 8.24. Lignes d'influence de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

8.2.3. CAS D'UNE CHARGE UNIFORMÉMENT RÉPARTIE

Nous calculerons l'effort tranchant et le moment fléchissant, à l'abscisse x , à partir des lignes d'influence. La valeur des efforts est égale à la surface hachurée multipliée par la densité p de charge uniformément répartie (cf. § 8.1.4). On a donc :

$$T(x) = p \times 1 \times (\ell - x) = p(\ell - x)$$

$$M(x) = p \times \frac{-1}{2}(\ell - x)(\ell - x) = -\frac{p(\ell - x)^2}{2}$$

La valeur maximum du moment fléchissant M et de l'effort tranchant T (en valeur absolue) se situe dans la section d'encastrement, c'est-à-dire pour $x = 0$, soit :

$$T_0 = p\ell \quad M_0 = -\frac{p\ell^2}{2}$$

8.2.4. CALCUL DES FLÈCHES

La déformée est calculée à partir de l'équation différentielle :

$$y'' = \frac{M(x)}{EI}$$

Rappelons qu'il s'agit d'une formule simplifiée négligeant, en particulier, la flèche due à l'effort tranchant, ce qui, dans le cas des consoles, peut induire des erreurs supérieures à 12%.

Les flèches maximales dues au seul moment fléchissant sont obtenues à l'extrémité libre de la console. Elles ont pour valeur :

– dans le cas d'une charge concentrée \bar{P} située à l'extrémité libre :

$$y = -\frac{P\ell^3}{3EI}$$

– dans le cas d’une charge uniformément répartie de densité p :

$$y = -\frac{p\ell^4}{8EI}$$

8.3. ÉTUDE DES POUTRES CONSOLES

Une poutre console est une poutre sur appuis simples AB prolongée par deux consoles AC et BD (figure 8.25).

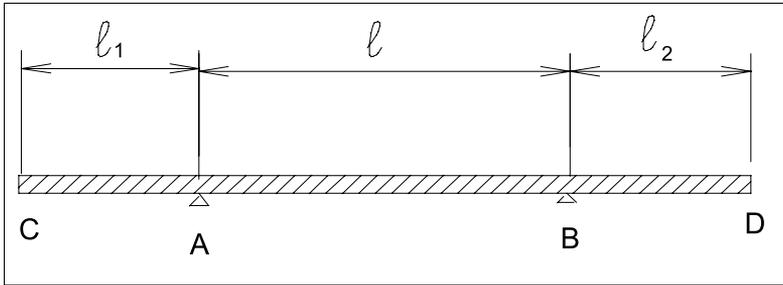


Figure 8.25. Poutre console.

La ligne représentative du moment fléchissant ou de l’effort tranchant pour une section d’une console AC ou BD est identique à celle d’une console isolée, puisqu’une charge sur la travée intermédiaire ou sur l’autre console n’a aucun effet sur la console considérée. En revanche, une charge disposée sur une console provoque des effets sur la partie centrale.

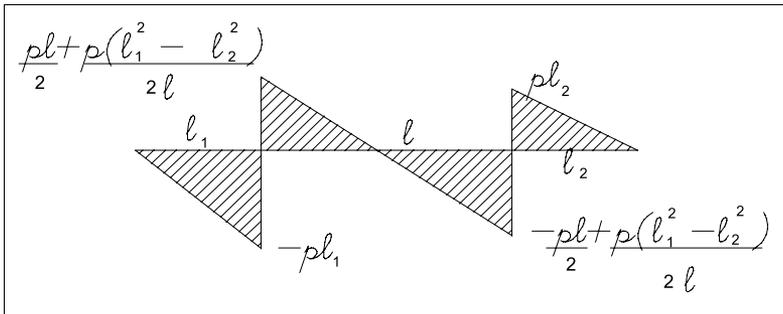


Figure 8.26. Ligne représentative de l’effort tranchant.

Dans cet ouvrage, seules les lignes représentatives de l’effort tranchant (figure 8.26) et du moment fléchissant (figure 8.27) sont données dans le cas où la charge est uniformément répartie de densité p .

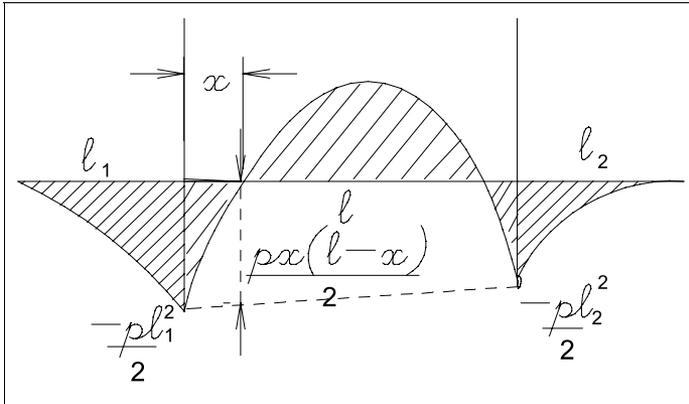


Figure 8.27. Ligne représentative du moment fléchissant.

Le lecteur est invité à effectuer les calculs lui permettant de retrouver les diverses valeurs de l'effort tranchant et du moment fléchissant données ci-dessus.

8.4. EXERCICES

8.4.1. POUTRE SUR APPUIS SIMPLES

Énoncé

Considérons une poutre sur deux appuis simples, de longueur $AB = 10$ m.

Nous supposons qu'il s'agit d'une poutre en béton armé, de section rectangulaire : 1,00 m de hauteur et 0,60 m de largeur ; la masse volumique du béton armé sera prise égale à $2,5 \text{ t/m}^3$.

Outre son poids propre cette poutre supporte un convoi composé de trois charges de 50 kN, 30 kN et 30 kN disposées ainsi que l'indique la figure 8.28. Ce convoi ne circule que dans un seul sens.

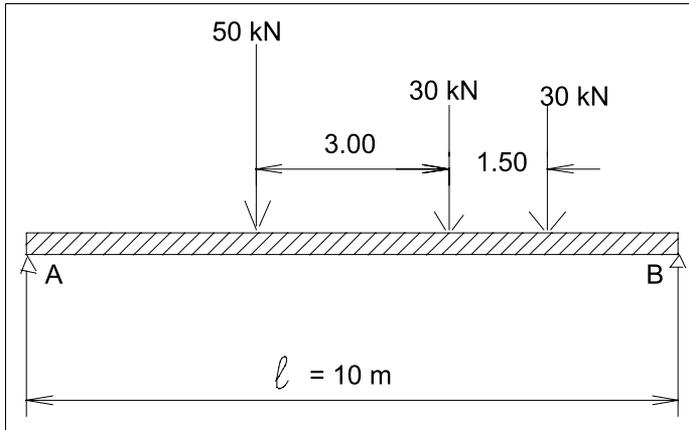


Figure 8.28. Poutre sur deux appuis simples supportant une charge uniformément répartie et un convoi.

1. Tracez les lignes d'influence de l'effort tranchant et du moment fléchissant dans une section d'abscisse x .
2. En déduire les lignes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant dus à la charge permanente (poids propre).
3. Calculer l'effort tranchant et le moment fléchissant maximaux dus au convoi en appliquant le théorème de Barré.

➡ Solution

1. Les lignes d'influence sont données par la figure 8.29, page suivante.
2. Le poids propre correspond à une charge uniformément répartie de densité : $p = 2,5 \times 1,00 \times 1,00 \times 0,60 = 1,5\text{t/m}$.

Or, les valeurs de T et M s'obtiennent en multipliant par p les surfaces hachurées, soit :

$$T = p \times \frac{1}{2}x \times \frac{-x}{10} + \frac{p}{2}(10 - x)\left(1 - \frac{x}{10}\right) = p(5 - x) = 7,5 - 1,5x$$

$$\text{et } M = \frac{p}{2} \times 10 \frac{x(10 - x)}{10} = 0,75x(10 - x)$$

Les lignes représentatives obtenues sont alors celles de la figure 8.30, page suivante.

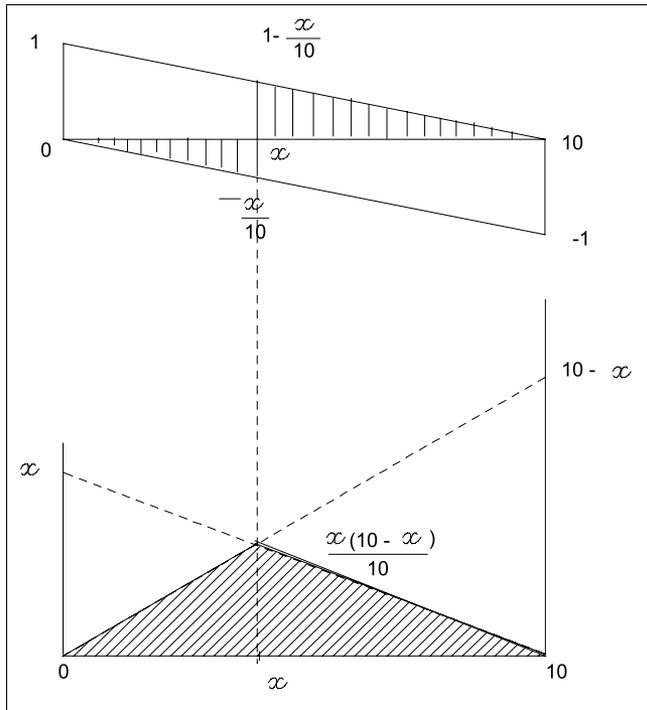


Figure 8.29. Lignes d'influence de l'effort tranchant (en haut) et du moment fléchissant (en bas).

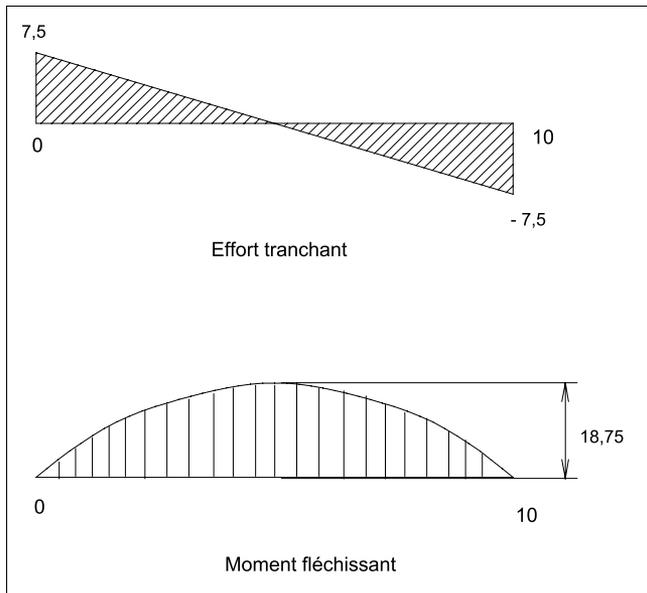


Figure 8.30. Lignes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

3. L'effort maximal du convoi est obtenu lorsque la charge de 50 kN se situe à l'origine A. La ligne d'influence est alors située en entier au dessus de AB. On obtient :

$$T_{\max} = 50 + 30 \times \frac{7}{10} + 30 \times \frac{5,5}{10} = 87,5 \text{ kN}$$

Pour déterminer le moment fléchissant maximum, nous utiliserons le théorème de Barré. Il faut donc déterminer dans un premier temps la position de la résultante du convoi (figure 8.31).

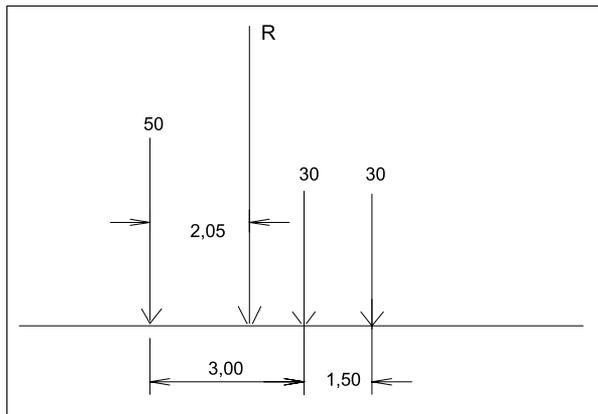


Figure 8.31. Position de la résultante du convoi.

Cette résultante \bar{R} a pour valeur : $50 + 30 + 30 = 110 \text{ kN}$.

Sa distance à la ligne d'action de la force de 50 kN est d , telle que : $d \times R = 30 \times 3 + 30 \times 4,5 = 225$, d'où $d = 2,05 \text{ m}$.

- Considérons le cas suivant : la résultante \bar{R} et la charge de 50 kN sont symétriques par rapport au milieu I de la portée (figure 8.32, page suivante).

$$\text{On a : } M = \frac{3,975 \times 6,025}{10} \left(50 + 30 \frac{3,025}{6,025} + 30 \frac{1,525}{6,025} \right) = 174 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

- Considérons le cas où la résultante \bar{R} et la première charge de 30 kN sont symétriques par rapport à I (figure 8.33, page suivante).

Le moment fléchissant a pour valeur :

$$M = \frac{5,475 \times 4,525}{10} \left[30 + 50 \frac{2,475}{5,475} + 30 \frac{3,025}{4,525} \right] = 180 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

Le deuxième cas donne donc le moment le plus grand.

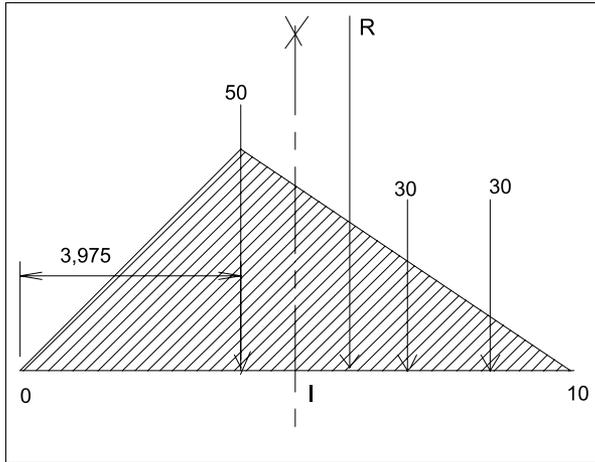


Figure 8.32. La résultante et la charge de 50 kN sont symétriques par rapport à I.

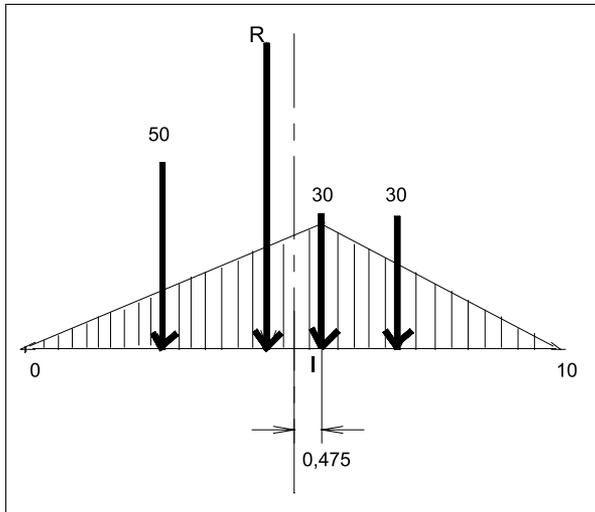


Figure 8.33. La résultante et la première charge de 30 kN sont symétriques par rapport à I.

8.4.2. CALCUL DE LA FLÈCHE À L'EXTRÉMITÉ D'UNE CONSOLE

➡ Énoncé

Calculez la flèche à l'extrémité d'une console en bois de 2 m de portée, sachant qu'elle support une charge de 10 kN à son extrémité libre (figure 8.34, page suivante).

La console a une section rectangulaire de 20 × 10 cm. La masse volumique du bois est de 0,8 t/m³. Le module de Young est de 10 000 MPa.

La flèche totale est la résultante de :

– la flèche due au poids propre $f_1 = -p\ell^4/8EI$;

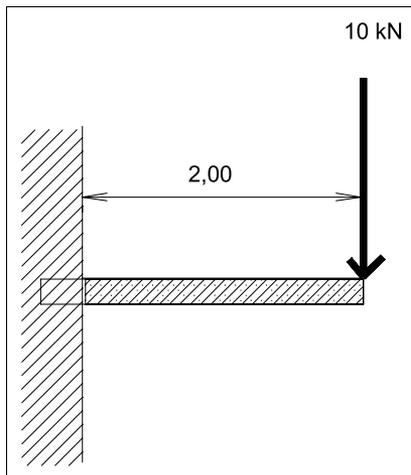


Figure 8.34. Console chargée à son extrémité libre.

– la flèche due à la charge concentrée $f_2 = -P\ell^3/3EI$.

La section de la poutre a une surface de $0,02 \text{ m}^2$. La densité de masse est donc de $0,016 \text{ t/m}^3$, correspondant à une charge $p = 0,16 \text{ kN/m}$.

Les différentes flèches ont pour valeur :

$$f_1 = -\frac{1}{EI} \times 320 = -\frac{320}{EI} \text{ m} \quad f_2 = -\frac{1}{EI} \frac{10\,000 \times 8}{3} = -\frac{26\,667}{EI} \text{ m}$$

Les deux flèches sont très différentes, celle due à la charge concentrée étant la plus considérable.

Avec $E = 10^4 \text{ MPa} = 10^{10} \text{ Pa}$ et $I = 0,10 \times 0,2^3/12 = 6,67 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$, on obtient $f = 40,5 \text{ mm}$.

8.4.3. ÉTUDE D'UNE POUTRE CONSOLE

➡ Énoncé

Considérons la poutre console du paragraphe 8.3.

1. Tracez la ligne d'influence du moment fléchissant dans une section (S) située dans la partie centrale AB, à la distance x de A.
2. Calculez le moment fléchissant en fonction de x dans cette section et tracez la ligne représentative.

➡ Solution

La figure 8.35, page suivante, précise les positions respectives de la charge unité et de la section (S) considérée.

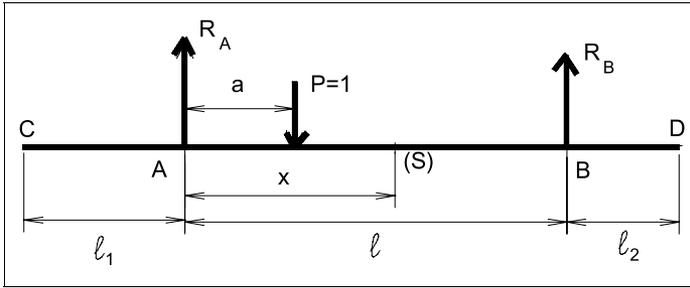


Figure 8.35. Disposition des forces et réactions pour le calcul des lignes d'influence.

1. De même que pour l'abscisse x , choisissons A comme origine pour la distance a de la charge unité.

Calculons la réaction en A en écrivant que le moment résultant des forces est nul en B :

$$R_A = \frac{\ell - a}{\ell}. \text{ Ce résultat est valable quel que soit le signe de } a.$$

- Premier cas : $a < x$ implique :

$$M = \frac{\ell - a}{\ell}x - 1(x - a) = \frac{a(\ell - x)}{\ell}$$

$$\text{Si } a = -\ell_1(\text{point C}), M = \frac{-\ell_1(\ell - x)}{\ell}$$

$$\text{Si } a = 0, M = 0$$

$$\text{Si } a = x, M = x \frac{(\ell - x)}{\ell}$$

- Deuxième cas : $a \geq x$ implique :

$$M = \frac{\ell - a}{\ell}x$$

$$\text{Si } a = \ell \text{ alors } M = 0$$

$$\text{Si } a = \ell + \ell_2 \text{ alors } M = -\ell_2 \frac{x}{\ell}$$

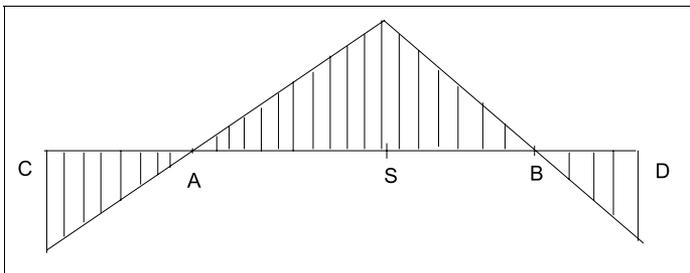


Figure 8.36. Ligne d'influence du moment fléchissant dans la section (S).

D'où on obtient la ligne d'influence (figure 8.36, page précédente).

Pour obtenir le moment fléchissant, il suffit de calculer les surfaces hachurées, soit :

$$M(x) = \frac{P}{2\ell}(-\ell_1^2(\ell - x) + x\ell(\ell - x) - \ell_2^2x)$$

$$\text{Pour } x = 0, M = \frac{-p\ell_1^2}{2}; \text{ pour } x = \ell, M = \frac{-p\ell_2^2}{2}$$

Les valeurs données précédemment sont confirmées. La courbe représentative de la figure 8.37 est alors obtenue.

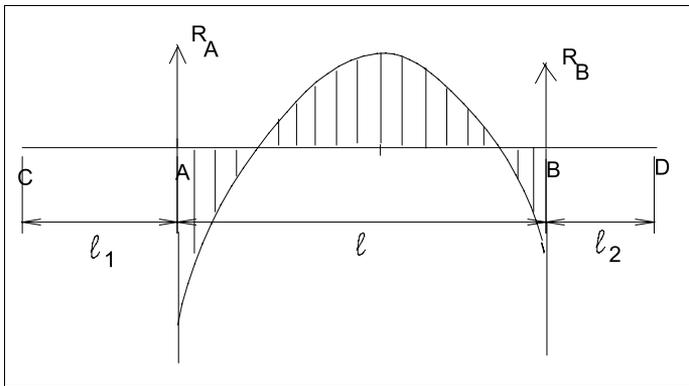


Figure 8.37. Ligne représentative du moment fléchissant dans la travée centrale.

9

Poutres droites hyperstatiques

9.1. GÉNÉRALITÉS

Les poutres droites hyperstatiques sont des poutres dont les liaisons aux extrémités sont telles qu'il n'est pas possible de calculer les réactions d'appui à l'aide des seules équations de la statique.

Lorsque l'on utilise ces équations, il reste une ou plusieurs réactions inconnues dont peuvent se déduire les autres. Ces réactions inconnues prennent le nom de *réactions hyperstatiques*. Leur nombre définit le *degré d'hyperstaticité* du système.

Considérons, par exemple, une poutre encadrée à ses extrémités A et B et soumise à des forces verticales (figure 9.1, page suivante).

En A et B, sont présents une réaction d'appui et un moment d'encastrement, soit quatre réactions inconnues. Or la statique ne peut donner que deux équations :

- la somme des forces et réactions verticales est nulle (il n'y a aucune force horizontale),
- le moment résultant par rapport à un point est nul.

Il reste donc deux réactions hyperstatiques : la poutre est dite hyperstatique de degré 2. Il existe une grande variété de poutres hyperstatiques. Dans cet ouvrage, seuls les trois cas suivants sont étudiés :

- les poutres encadrées à leurs deux extrémités,
- les poutres encadrées à une extrémité, sur appui simple à l'autre,
- les poutres continues.

Ce dernier cas correspond aux ossatures des bâtiments courants ainsi qu'à la plupart des ponts autoroutiers.

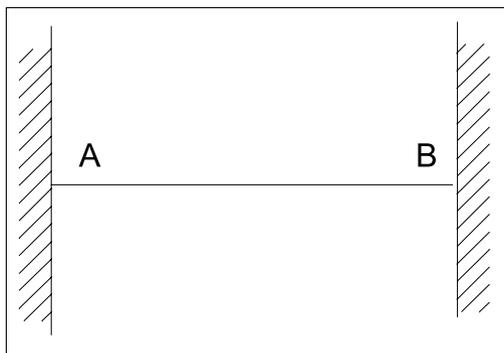


Figure 9.1. Poutre encastree à ses deux extrémités.

9.2. FORMULES VALABLES POUR TOUTES LES POUTRES HYPERSTATIQUES

Considérons une poutre de longueur ℓ , et désignons par \vec{M}_0 et \vec{M}_1 , les moments fléchissants aux extrémités 0 et 1.

Supposons, dans un premier temps, que la poutre ne soit soumise à aucune force, mais seulement aux moments de réaction aux extrémités. Une telle configuration est possible dans le cas d'une poutre continue à trois travées dont seules les travées extrêmes reçoivent des charges (figure 9.2).

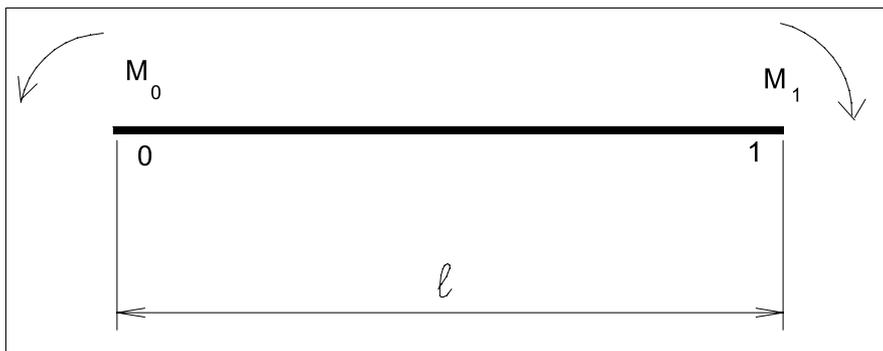


Figure 9.2. Poutres soumise à des moments à ses deux extrémités.

Le moment fléchissant est le moment des forces à gauche de la section considérée, ou bien le moment des forces à droite, changé de signe (cf. § 4.3).

Il en résulte que les moments de réaction aux appuis correspondent à $+M_0$ et $-M_1$ (figure 9.3, page suivante).

D'autre part, puisque M_0 n'est en général pas égal à M_1 , il existe nécessairement des réactions d'appui R_0 et R_1 , pour que le système soit en équilibre.

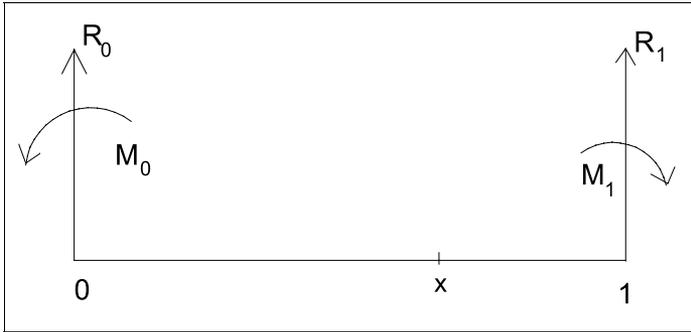


Figure 9.3. Poutre soumise seulement à des réactions d'appui et à des moments aux appuis.

Les équations de la statique permettent d'écrire que la résultante des forces est nulle :

$$R_0 + R_1 = 0 \quad (9.1)$$

Le moment résultant à l'extrémité 1 (par exemple) est nul, soit :

$$M_0 + R_0 \ell - M_1 = 0 \quad (9.2)$$

D'où l'on tire :

$$R_0 = \frac{M_1 - M_0}{\ell}$$

Le moment fléchissant à l'abscisse x est alors ⁽¹⁾ :

$$M(x) = M_0 + R_0 x = M_0 + x \frac{M_1 - M_0}{\ell} = M_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + M_1 \frac{x}{\ell}$$

On trouve bien $M = M_0$ pour $x = 0$ et $M = M_1$ pour $x = \ell$.

Supposons maintenant que la poutre reçoive un système de charges quelconque. Nous raisonnerons par superposition :

- la poutre recevant le système de charges est alors considérée comme étant *sur appuis simples*; $m(x)$ et $t(x)$ sont respectivement les moments fléchissants et efforts tranchants correspondants,
- nous considérerons ensuite la poutre ne supportant aucune charge, mais soumise à ses extrémités à des moments de réaction $+M_0$ et $-M_1$.

Le moment fléchissant à l'abscisse x est alors :

$$M(x) = m(x) + M_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + M_1 \frac{x}{\ell}$$

1. Formule fondamentale à connaître.

De même l'effort tranchant est donné par :

$$T(x) = t(x) + \frac{M_1 - M_0}{\ell}$$

Comme $m(x)$ est nul aux extrémités, on retrouve $M(0) = M_0$ et $M(\ell) = M_1$

Les formules précédentes sont fondamentales pour l'étude des poutres hyperstatiques.

9.3. POUTRE ENCASTRÉE À SES DEUX EXTRÉMITÉS

Le moment fléchissant et l'effort tranchant dépendent des deux inconnues hyperstatiques M_0 et M_1 (cf. § 9.1). Pour déterminer ces inconnues, il faut faire appel aux notions de déformation de la poutre.

Or, l'ordonnée y de la fibre moyenne est, *en première approximation*, la solution de l'équation différentielle (selon la formule 8.1) :

$$y'' = \frac{M(x)}{EI}$$

En intégrant cette équation, on obtient successivement y' , dérivée première de y , qui correspond à la pente de la déformée, puis y , c'est-à-dire la flèche, l'ensemble étant considéré à l'abscisse x .

Dans le cas de la poutre encastrée à ses extrémités, M_0 et M_1 sont obtenus en supposant que l'encastrement est parfait, c'est-à-dire en supposant que la poutre reste horizontale à ses extrémités. Cette condition nécessite que $y'_0 = 0$ et $y'_1 = 0$. Ces deux équations permettront ainsi de déterminer M_0 et M_1 .

Par exemple, dans le cas d'une charge uniformément répartie de densité p , nous obtenons :

$$m(x) = p \frac{x(\ell - x)}{2}$$

Par ailleurs, par symétrie, $M_0 = M_1$,

d'où :

$$M(x) = M_0 + p \frac{x(\ell - x)}{2} \text{ et } y'' = \frac{1}{EI} \left[M_0 + p \frac{x(\ell - x)}{2} \right]$$

ce qui donne, en intégrant (avec la variable d'intégration) :

$$y' = y'_0 + \frac{1}{EI} \left[M_0 x + \frac{p}{2} \left(\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right]$$

D'autre part, du fait de l'encastrement, la tangente à la déformée reste horizontale au voisinage des deux encastresments. En écrivant que $y'_0 = 0 = y'_1$, on obtient :

$$y'_1 = 0 = \frac{1}{EI} \left[M_0 \ell + \frac{p}{2} \left(\frac{\ell^3}{2} - \frac{\ell^3}{3} \right) \right], \text{ soit } M_0 = M_1 = -\frac{p\ell^2}{12}$$

L'expression du moment fléchissant est donc :

$$M(x) = p \frac{x(\ell - x)}{2} - \frac{p\ell^2}{12}$$

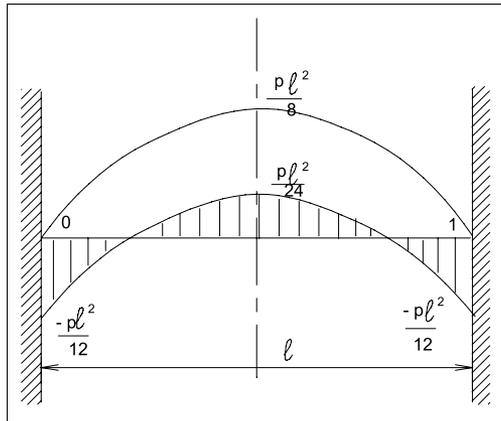


Figure 9.4. Ligne représentative du moment fléchissant dans une poutre encastree à ses extremités.

Le diagramme représentatif est celui d'une poutre sur appuis simples, décalé vers le bas, d'une distance égale à $p\ell^2/12$ (figure 9.4). La valeur du moment au milieu de la poutre est $p\ell^2/24$.

Nous avons traité le cas de l'encastrement parfait. Ce cas divise par trois le moment au milieu de la poutre. Dans la réalité, l'encastrement est souvent imparfait ; c'est pourquoi les différents règlements (cf. § 9.5), demandent de prendre un moment supérieur en ce qui concerne le milieu de poutre.

9.4. POUTRE ENCASTRÉE À UNE EXTRÉMITÉ, SUR APPUI SIMPLE À L'AUTRE

C'est le même cas que précédemment avec $M_1 = 0$. On obtient donc :

$$M(x) = m(x) + M_0 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)$$

Dans le cas d'une charge uniformément répartie de densité p , $M(x)$ devient :

$$M(x) = p \frac{x(\ell - x)}{2} + M_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

Intégrons l'équation différentielle $y'' = M(x)/EI$. Une première intégration permet d'obtenir :

$$y' = y_0' + \frac{1}{EI} \left[\frac{p}{2} \left(\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + M_0 \left(x - \frac{x^2}{2\ell} \right) \right]$$

En supposant un encastrement parfait à l'origine, la tangente à la déformée est horizontale aux appuis, d'où $y_0' = 0$. Une deuxième intégration permet d'obtenir la flèche :

$$y = y_0 + \frac{1}{EI} \left[\frac{p}{2} \left(\frac{\ell x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + M_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6\ell} \right) \right]$$

Pour déterminer la valeur de M_0 , nous écrivons :

- d'une part, $y_0 = 0$, flèche nulle à l'origine,
- d'autre part, $y_1 = 0$, flèche nulle à l'autre extrémité, en supposant les deux appuis sur une même horizontale ⁽²⁾.

$y(\ell) = 0$ permet d'obtenir :

$$\frac{p}{2} \left(\frac{\ell^4}{6} - \frac{\ell^4}{12} \right) + M_0 \left(\frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell^2}{6} \right) = 0, \text{ d'où } M_0 = -\frac{p\ell^2}{8}$$

Au final $M(x)$ a pour équation :

$$M(x) = p \frac{x(\ell - x)}{2} - \frac{p\ell^2}{8} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

Le moment est donc la somme du moment de la poutre sur appuis simples (représentation parabolique) et du moment de la poutre sans charge (représentation linéaire) (figure 9.5, page suivante).

Il est maximum en valeur absolue à l'origine, nul pour $x = \ell/4$ et positif maximum pour $x = 5/8\ell$.

Par rapport à la valeur maximale du moment en travée indépendante $M_{max} = p\ell^2/8$, on a : $M/M_{max} = -1$ pour $x = 0$, $1/2$ pour $x = \ell/2$, $9/16$ pour $x = 5\ell/8$.

2. Si ce n'était pas le cas, $y(\ell)$ aurait une valeur non nulle, mais connue, qui permettrait aussi de calculer M_0 , avec une valeur différente.

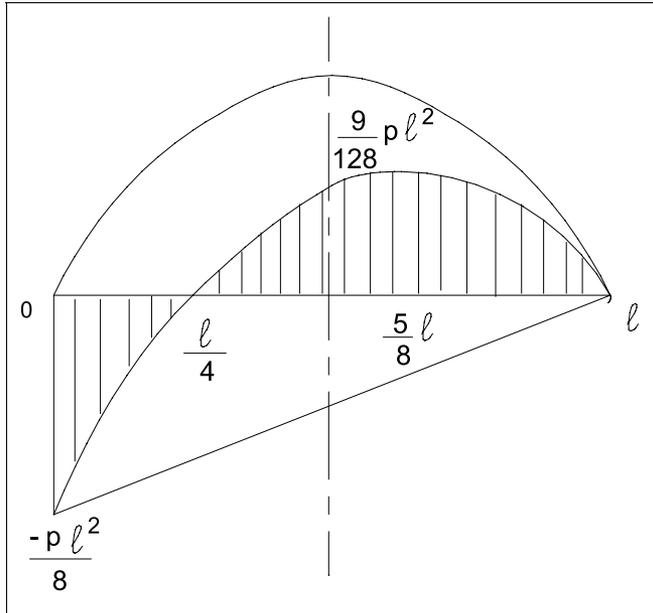


Figure 9.5. Poutre encastée à une extrémité, sur appui simple à l'autre.
Ligne représentative du moment fléchissant.

9.5. POUTRES CONTINUES

Nous étudierons, dans ce paragraphe, une poutre à deux travées égales supportant une charge uniformément répartie de densité p . (Nous verrons plus loin (§ 9.7) le cas des poutres à 3 et 4 travées égales.)

La poutre considérée est donc une poutre horizontale reposant sur deux appuis incompressibles. Une telle poutre est une fois hyperstatique.

M_1 , inconnue hyperstatique, est la valeur du moment fléchissant au droit de l'appui intermédiaire A_1 ⁽³⁾. (figure 9.6, page suivante).

Le moment fléchissant à l'abscisse x est donné par (cf. § 9.2) :

$$M(x) = m(x) + M_0\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + M_1 \frac{x}{\ell}$$

Dans la travée A_0A_1 , le moment fléchissant étant nul sur l'appui libre :

$$M_1(x) = p \frac{x(\ell - x)}{2} + M_1 \frac{x}{\ell}$$

3. S'il y avait n travées, la poutre serait $(n - 1)$ fois hyperstatique; on choisirait comme inconnues hyperstatiques les moments fléchissants au droit des appuis intermédiaires.

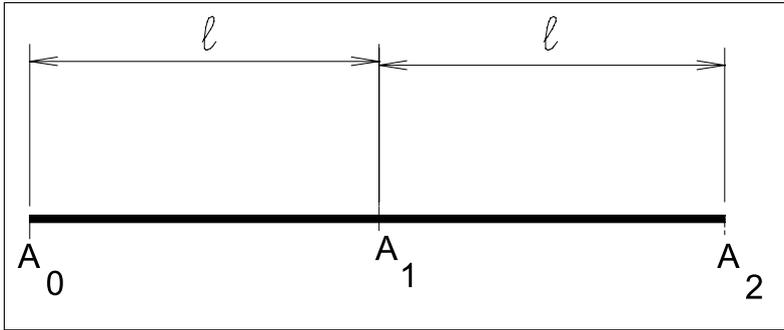


Figure 9.6. Poutre continue à deux travées égales.

De la même manière, sur la deuxième travée, $M(x)$ est donné par :

$$M_2(x) = p \frac{x(\lambda - x)}{2} + M_1 \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)$$

On vérifie que : $M_1(\lambda) = M_1 = M_2(0)$.

Pour déterminer M_1 , nous prenons en compte la continuité de la fibre moyenne sur l'appui A_1 , en écrivant que la tangente est la même à gauche et à droite ⁽⁴⁾, c'est-à-dire :

$$y'_1(\lambda) = y'_2(0)$$

D'autre part, $y'' = M(x)/EI$ d'où :

$$EI y'_1 = EI y'_1(0) + p \left(\frac{\ell x^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right) + M_1 \frac{x^2}{2\ell}$$

- $EI y'_1(0)$ est la constante d'intégration,
- $EI y'_2$ est obtenu par la même méthode :

$$EI y'_2 = EI y'_2(0) + p \left(\frac{\ell x^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right) + M_1 \left(x - \frac{x^2}{2\ell} \right)$$

Du fait de la symétrie des charges et des poutres, la déformée est symétrique.

On a donc $y'_1(0) = -y'_2(\ell)$. On peut en déduire, et par conséquent vérifier, que $y'_1(\lambda) = y'_2(0) = 0$ (tangente horizontale sur l'appui central).

y'_1 et y'_2 sont alors donnés par :

$$EI y'_1 = p \left(\frac{\ell x^2}{4} - \frac{x^3}{6} - \frac{\ell^3}{12} \right) + M_1 \frac{x^2 - \ell^2}{2\ell}$$

$$EI y'_2 = p \left(\frac{\ell x^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right) + M_1 \left(x - \frac{x^2}{2\ell} \right)$$

4. De plus, du fait de la symétrie, cette tangente est ici horizontale.



Figure 9.7. Déformée d'une poutre continue.

Seules les constantes d'intégration ont pu être éliminées, mais pas l'inconnue hyperstatique. C'est logique, puisque les flèches n'ont pas encore été prises en compte, et notamment le fait que la flèche est nulle sur l'appui central, du fait du caractère incompressible des appuis, pris par hypothèse.

En intégrant les deux valeurs ci-dessus de y' , deux nouvelles constantes d'intégration vont apparaître, mais nous allons obtenir trois équations : flèches nulles aux trois appuis. Ainsi l'inconnue hyperstatique pourra être déterminée.

Nous avons :

$$EIy_1 = EIy_1(0) + p\left(\frac{\ell x^3}{12} - \frac{x^3}{24} - \frac{\ell^3 x}{12}\right) + M_1\left(\frac{x^3}{6\ell} - \frac{\ell^2 x}{2\ell}\right)$$

$$EIy_2 = EIy_2(0) + p\left(\frac{\ell x^3}{12} - \frac{x^4}{24}\right) + M_1\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6\ell}\right)$$

En écrivant que la flèche est nulle en A_0 et en A_1 on déduit immédiatement que les constantes d'intégration $y_1(0)$ et $y_2(0)$ sont nulles.

Puisque $y_1(\ell)$ est nul, il vient :

$$p\left(\frac{\ell^4}{12} - \frac{\ell^4}{24} - \frac{\ell^4}{12}\right) + M_1\left(\frac{\ell^3}{6\ell} - \frac{\ell^3}{2\ell}\right) = 0 \quad \text{soit } M_1 = \frac{-p\ell^2}{8}$$

9.6. CAS PARTICULIER DES BÂTIMENTS COURANTS EN BÉTON ARMÉ

Dans les bâtiments courants en béton armé, les poutres d'ossatures de planchers sont généralement solidaires des poteaux qui les supportent. Elles sont également continues de part et d'autre des poteaux, dans les travées intermédiaires, continues d'un seul côté pour les travées de rive.

Leur calcul exact est long et compliqué (encore que l'informatique apporte des solutions rapides), mais des méthodes simplifiées sont communément admises ; elles permettent d'ailleurs de vérifier rapidement des calculs, sans intervention de l'informatique.

Ci-après la méthode de calcul applicable aux planchers à charge d'exploitation modérée, dite *méthode forfaitaire*, est donnée telle qu'elle est fournie dans l'annexe E.1 des Règles BAEL 91 (*Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états limites*).

9.6.1. DOMAINE D'APPLICATION

Il est supposé que :

- la sollicitation due à la charge d'exploitation ne dépasse pas le double de celle due à la charge permanente,
- les moments d'inertie des sections transversales sont les mêmes dans les différentes travées en continuité,
- les portées successives sont dans un rapport compris entre 0,8 et 1,25.

9.6.1.1. Principe de la méthode

On calcule d'abord la valeur maximale du moment fléchissant, noté M_0 , dans la *travée de comparaison*, c'est-à-dire dans la travée indépendante de même portée que la travée considérée et soumise aux mêmes charges.

La méthode consiste ensuite à évaluer les valeurs maximales des moments en travée et des moments sur appuis à des fractions de M_0 *fixées forfaitairement* ⁽⁵⁾.

9.6.1.2. Conditions d'application de la méthode

- Valeurs des coefficients

Appelons respectivement $|M_w|$ et $|M_e|$ les *valeurs absolues* des moments sur appuis de gauche (west) et de droite (est) et M_t le moment maximal en *travée* qui sont pris en compte dans les calculs de la travée considérée.

Appelons α le rapport des charges d'exploitation à la somme des charges permanentes et des charges d'exploitation : $\alpha = Q_B / (G + Q_B)$

Les valeurs de M_t , $|M_w|$ et $|M_e|$ doivent vérifier les conditions suivantes :

- $M_t + (M_w + M_e) / 2 \geq (1 + 0,3\alpha) M_0$ ⁽⁶⁾,
- Le moment maximal en travée M_t n'est pas inférieur à :

$$\frac{1 + 0,3\alpha}{2} M_0 \text{ dans le cas d'une travée intermédiaire,}$$

$$\frac{1,2 + 0,3\alpha}{2} M_0 \text{ dans le cas d'une travée de rive.}$$

- La valeur absolue de chaque moment sur appui intermédiaire n'est pas inférieure à :
 - $0,60M_0$ dans le cas d'une poutre à deux travées,
 - $0,50M_0$ dans le cas des appuis voisins des appuis de rive d'une poutre à plus de deux travées,

5. Les valeurs forfaitaires adoptées peuvent varier, *dans les limites données par la méthode*, suivant l'expérience que le projeteur peut avoir en la matière.

6. Le second membre de l'inégalité n'étant pas inférieur à $1,05 M_0$.

- $0,40M_0$ dans le cas des autres appuis intermédiaires d'une poutre à plus de trois travées.

De part et d'autre de chaque appui intermédiaire, est retenue, pour la vérification des sections, la plus grande des valeurs absolues des moments évalués à gauche et à droite de l'appui considéré.

Si les calculs font intervenir un moment d'encastrement sur un appui de rive, la résistance de cet appui sous l'effet du moment pris en compte doit être justifiée.

9.7. EXERCICES

9.7.1. POUTRE ENCASTRÉE À UNE EXTRÉMITÉ, SUR APPUI SIMPLE À L'AUTRE

➡ Énoncé

Étudions le cas de la poutre encastrée à une extrémité, sur appui simple à l'autre (cf. § 9.4 et figure 9.8). Elle est soumise à une charge uniformément répartie de densité p .

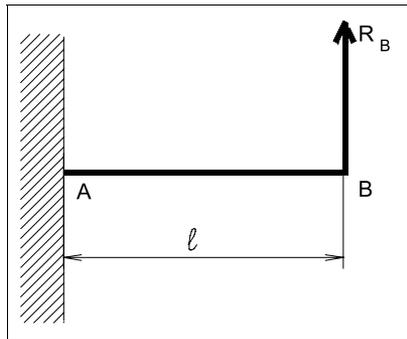


Figure 9.8. Poutre encastrée en A, sur appui simple en B.

Il est tout à fait possible d'imaginer que cette poutre est une console à l'extrémité de laquelle est appliquée une force \vec{R}_B verticale, dirigée vers le haut, telle que le point B reste à l'horizontale du point A. Calculez \vec{R}_B et, de là, le moment fléchissant dans la poutre.

➡ Solution

Sous l'effet de la charge répartie, la console se déforme. La flèche à l'extrémité B, supposée libre, est alors donnée par :

$$f_1 = -\frac{p\ell^4}{8EI}$$

D'autre part nous avons vu que la même console, soumise à une force *unique* \bar{R}_B , aurait une flèche égale à :

$$f_2 = + \frac{R_B \ell^3}{3EI}$$

Le point B ne peut rester fixe que si la somme des flèches est nulle :

$\Sigma(f) =$ flèche de la charge répartie (f_1) + flèche de la réaction R_B (f_2) = 0. Soit :

$$\frac{-p\ell^4}{8EI} + \frac{R_B \ell^3}{3EI} = 0, \text{ d'où } R_B = \frac{3}{8}p\ell$$

Or, le moment fléchissant à l'extrémité encastree A est égal au moment des forces à droite, changé de signe. Ainsi, nous obtenons :

$$M_A = - \left(p\ell \times \frac{\ell}{2} - \frac{3}{8}p\ell \times \ell \right) = - \frac{p\ell^2}{8}$$

Nous retrouvons ainsi la valeur déterminée en 9.4.

9.7.2. POUTRE CONTINUE À DEUX TRAVÉES ÉGALES

➡ Énoncé

En appliquant une méthode semblable, étudiez le problème de la poutre continue à deux travées égales, chargée uniformément (figure 9.9).

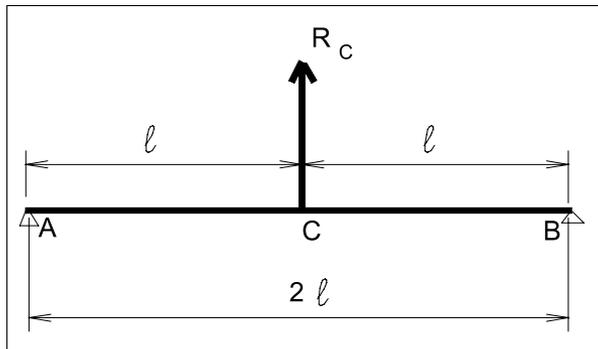


Figure 9.9. Poutre continue à deux travées égales.

➡ Solution

La poutre peut être considérée comme une poutre sur appuis simples, de longueur : $AB = L = 2\ell$, recevant en son milieu C une charge concentrée R_C dirigée vers le haut.

La flèche au milieu de la poutre, sous la charge répartie, est égale à :

$$f_1 = -\frac{5}{384} \frac{pL^4}{EI}$$

et celle due à la charge concentrée à :

$$f_2 = +R_C \frac{L^3}{48EI}$$

En écrivant $f_1 + f_2 = 0$, on en déduit :

$$R_C = \frac{5}{8} pL = \frac{5}{4} p\ell$$

Les réactions en A et B sont alors égales à :

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} \left(2p\ell - \frac{5}{4} p\ell \right) = \frac{3}{8} p\ell$$

Le moment fléchissant sur l'appui intermédiaire C est alors :

$$M_C = \frac{3}{8} p\ell \times \ell - p\ell \times \frac{\ell}{2} = -\frac{p\ell^2}{8}$$

valeur qui avait été trouvée au paragraphe 9.5.

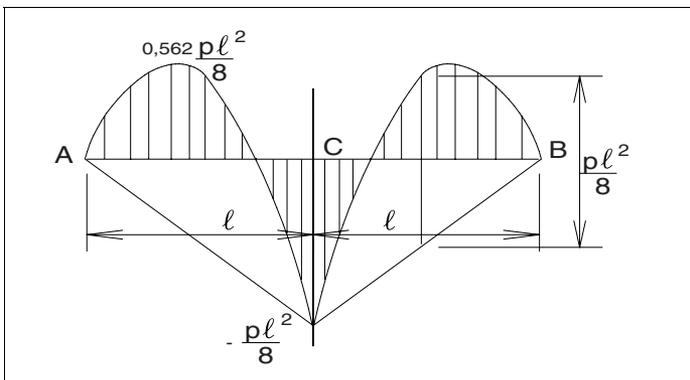


Figure 9.10. Ligne représentative du moment fléchissant.

Les deux exercices montrent que, dans des cas particuliers, il est possible de déterminer les inconnues hyperstatiques à l'aide d'astuces. Toutefois, dans les cas généraux, il est préférable de suivre la méthode consistant à déterminer la fibre moyenne déformée à partir de l'équation différentielle $y'' = M(x)/EI$.

9.7.3. POUTRE CONTINUE À TROIS TRAVÉES ÉGALES

➡ Énoncé

Considérons une poutre continue à trois travées égales, chargées de manière uniformément répartie avec une densité p (figure 9.11).

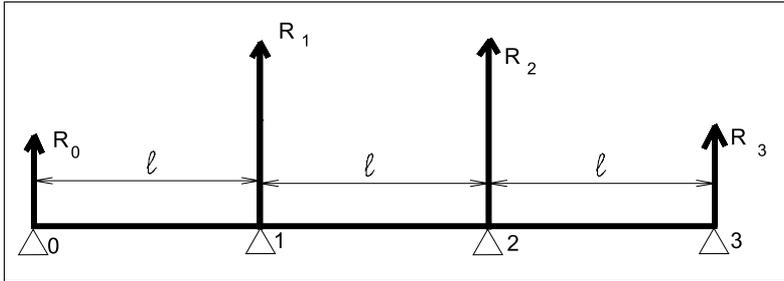


Figure 9.11. Poutre continue à trois travées égales.

Trouvez les valeurs de $T(x)$ et $M(x)$, et tracez les lignes représentatives.

➡ Solution

Le système est hyperstatique de degré 2. Toutefois, du fait de la symétrie par rapport au milieu de la poutre, il suffit de déterminer une seule des inconnues hyperstatiques, par exemple la réaction R_0 , et d'étudier le système sur seulement la moitié gauche.

Une première relation est obtenue en écrivant l'équilibre des forces :

$$R_0 + R_1 = 1,5 p \ell \tag{9.3}$$

L'étude de la travée 0-1 permet d'obtenir :

$$M(x) = R_0 x - \frac{p x^2}{2}, \text{ d'où } EI y' = EI y'_0 + R_0 \frac{x^2}{2} - p \frac{x^3}{6}$$

où $EI y'_0$ est la constante d'intégration.

En intégrant une seconde fois on obtient la flèche y :

$$EI y = EI y_0 + EI y'_0 x + R_0 \frac{x^3}{6} - p \frac{x^4}{24}$$

La flèche étant nulle à l'appui 0, on extrait $y_0 = 0$.

En écrivant ensuite que la flèche est nulle à l'appui 1, soit pour $x = \ell$, on trouve :

$$EI y(\ell) = EI \ell y'_0 + R_0 \frac{\ell^3}{6} - p \frac{\ell^4}{24} = 0, \text{ d'où } EI y'_0 + R_0 \frac{\ell^2}{6} - p \frac{\ell^3}{24} = 0 \tag{9.4}$$

Ensuite, l'étude de la travée 1-2 permet d'obtenir :

$$M(x) = R_0 x + R_1(x - \ell) - p \frac{x^2}{2}, \text{ d'où } EI y' = EI y'_1 + R_0 \frac{x^2}{2} + R_1 \frac{(x - \ell)^2}{2} - p \frac{x^3}{6}$$

Écrivons la continuité de la tangente à la déformée de part et d'autre de l'appui 1 :

– pour la travée 0–1, $EIy'(\ell) = EIy'_0 + R_0 \frac{\ell^2}{2} - p \frac{\ell^3}{6}$

– pour la travée 1–2, $EIy'(\ell) = EIy'_1 + R_0 \frac{\ell^2}{2} - p \frac{\ell^3}{6}$

De l'égalité des valeurs de $y'(\ell)$ dans les deux travées, on extrait $y'_0 = y'_1$.

D'autre part, la tangente à la déformée étant horizontale au milieu de la travée 1–2, on obtient :

$$EIy'\left(\frac{3\ell}{2}\right) = 0 = EIy'_0 + R_0 \frac{9\ell^2}{2} + \frac{R_1 \ell^2}{2 \cdot 4} - \frac{p \cdot 27\ell^3}{6 \cdot 8}$$

En remplaçant R_1 par sa valeur obtenue par l'équation [1], il vient :

$$EIy'_0 + \ell^2 R_0 - \frac{3}{8} p \ell^3 = 0 \tag{9.5}$$

Le système est ainsi composé de deux équations linéaires à deux inconnues : (9.4) et (9.5) dont on extrait facilement $R_0 = (16/40)p\ell = 0,4p\ell$. Par suite, il est facile de calculer $T(x)$ et $M(x)$.

L'effort tranchant a pour valeur :

– travée 0–1 : $T = 0,4p\ell - px$;

– travée 1–2 : $T = 1,5p\ell - px$.

Le moment fléchissant a pour valeur :

– travée 0–1 : $M = 0,4p\ell x - 0,5px^2$;

– travée 1–2 : $M = 1,5p\ell x - 1,1p\ell^2 - 0,5px^2$.

Ainsi, on trace les lignes représentatives (figure 9.12 et figure 9.13, page suivante).

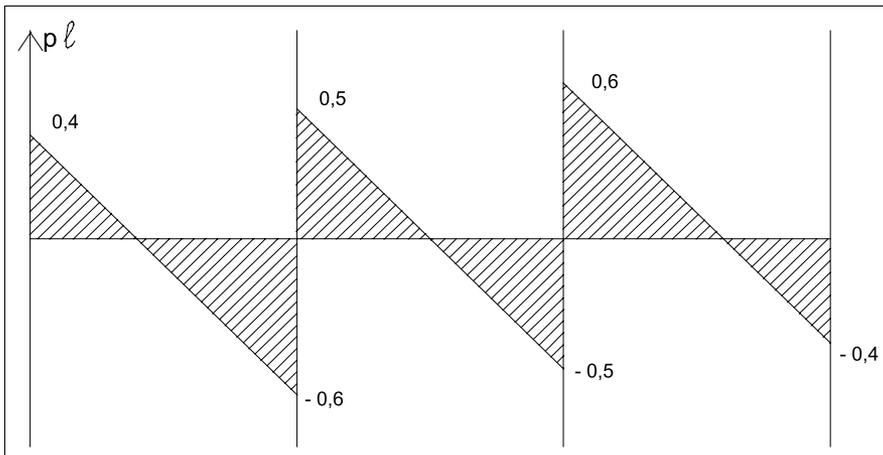


Figure 9.12. Ligne représentative de l'effort tranchant.

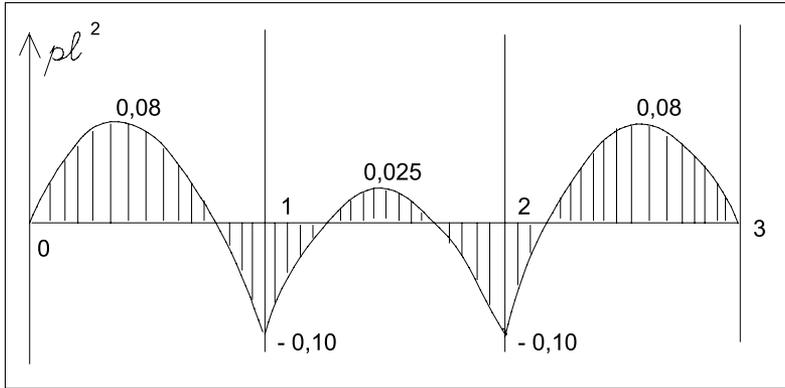


Figure 9.13. Ligne représentative du moment fléchissant.

9.7.4. POUTRE CONTINUE À QUATRE TRAVÉES ÉGALES

Nous donnons, seulement à titre indicatif, le résultat concernant une poutre à quatre travées égales uniformément chargées.

La ligne représentative du moment a la forme de la figure 9.14, avec les valeurs caractéristiques suivantes, en appelant M_0 le moment maximum en travée indépendante :

$$M_0 = \frac{pl^2}{8}$$

Moments sur appuis : $MB = MD = -6/7 M_0 = -0,857 M_0$
 $MC = -4/7 M_0 = -0,571 M_0$

Moments positifs maximums en travée :

- travée de rive : $0,618 M_0$,
- travées centrales : $0,291 M_0$.

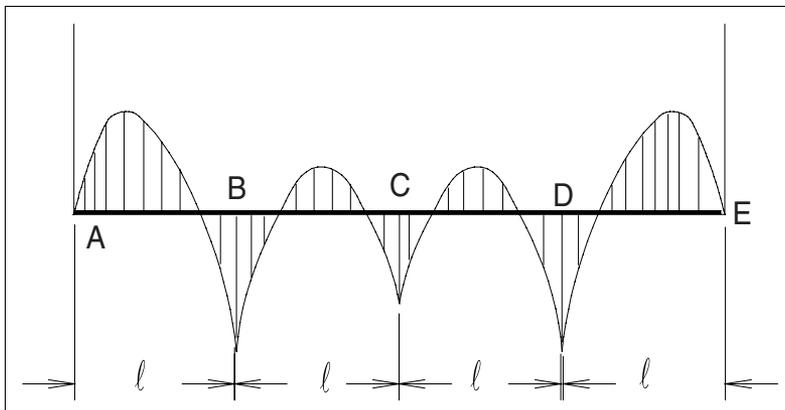


Figure 9.14. Ligne représentative du moment fléchissant.

Systemes réticulés isostatiques

10

10.1. DÉFINITIONS

Un système *réticulé* (ou à *treillis*) est un système composé de barres rectilignes articulées entre elles à leurs extrémités; les points d'articulation, communs à plusieurs barres, sont les *nœuds* du système.

Les seules forces extérieures appliquées au système (forces données et réactions d'appuis) sont supposées être appliquées aux nœuds. Il en résulte qu'une barre AB du système, comprise entre les nœuds A et B, est en équilibre sous l'action de deux forces égales et opposées appliquées, l'une en A, l'autre en B. Cette barre ne supporte donc qu'une force normale \bar{F} , appelée *effort dans la barre AB*. Par convention, F est positif si la barre AB est comprimée, négatif si la barre AB est tendue.

Lorsque toutes les barres et les forces appliquées sont dans un même plan, le système est un *système réticulé plan*.

Un système triangulé est un système réticulé formé de triangles juxtaposés extérieurement, les barres étant les côtés communs à deux triangles. Dans cet ouvrage, seule l'étude des systèmes triangulés plans est traitée.

Le problème posé par le calcul des systèmes réticulés est la détermination des réactions d'appui et des efforts dans les barres. Les équations de la statique sont au nombre de trois (deux, s'il n'y a que des forces verticales). Si ces trois équations suffisent pour déterminer les réactions d'appui, le système réticulé est dit *extérieurement isostatique*. S'il existe des réactions en nombre surabondant, le système est dit *extérieurement hyperstatique*. Les réactions d'appui une fois connues, s'il est possible de déterminer tous les efforts dans les barres, le système est dit *intérieurement isostatique*. Seule l'étude de tels systèmes est traitée.

Si nous avons n nœuds et b barres, la condition pour que le système soit isostatique est $b = 2n - 3$. Cette condition est également une condition nécessaire et suffisante pour que le système soit *strictement indéformable*.

10.2. MÉTHODE DES NŒUDS - ÉPURE DE CRÉMONA

Une méthode de détermination des efforts dans les barres d'un système intérieurement isostatique est la méthode des *nœuds* : il s'agit d'écrire l'équilibre des forces et réactions appliquées à chaque nœud, ce qui conduit à résoudre un système d'équations linéaires. Ceci suppose obligatoirement que les forces sont toutes appliquées aux nœuds du système. Or il n'en est pas toujours ainsi : c'est notamment le cas du poids propre des barres qui est réparti le long de chaque barre; il en est de même des charges de vent ou de neige. Dans ce cas, il convient de répartir les charges sur les nœuds situés aux extrémités de la barre. Par exemple, le poids propre de la barre CA (figure 10.1) sera réparti, pour moitié, sur les nœuds C et A.

Il est possible de traduire graphiquement la méthode des nœuds par l'*épure de Crémone*, en associant à chaque nœud, le polygone des forces qui lui sont appliquées.

La méthode de construction est expliquée à partir de l'exemple suivant :

Soit le système triangulé, posé sur deux appuis simples A et B (figure 10.1).

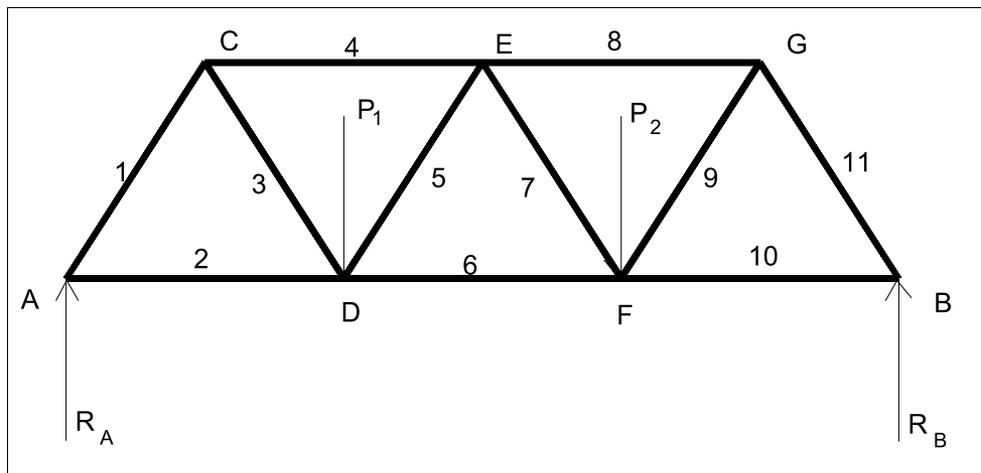


Figure 10.1. Système triangulé sur deux appuis simples.

Ce système supporte deux charges concentrées : $P_1 = 60\,000$ N, au nœud D ; $P_2 = 30\,000$ N au nœud F.

Vérifions que le système est isostatique :

– le nombre de barres est égal à 11,

– le nombre de nœuds est de 7.

On a bien $b = 2n - 3$ ($11 = 14 - 3$).

Les réactions aux appuis sont, respectivement, $R_A = 50\ 000\ \text{N}$ et $R_B = 40\ 000\ \text{N}$.

Pour construire le *Crémona*, considérons une origine O quelconque, après avoir numéroté les barres.

Considérons d'abord le nœud A . En faisant le tour de ce nœud vers la gauche, nous trouvons la réaction \vec{R}_A que nous traçons à partir de O sur le graphique Crémona, puis la force exercée dans la barre 2, puis la force dans la barre 1 (figure 10.2).

Il faut remarquer, et cela est valable de façon générale, que seules subsistent deux inconnues. Ceci est fondamental : en effet, la solution consiste à construire un triangle et il faut disposer d'un côté et des directions des deux autres côtés. S'il y a plus de deux inconnues, nous ne sommes plus dans le cas d'un triangle.

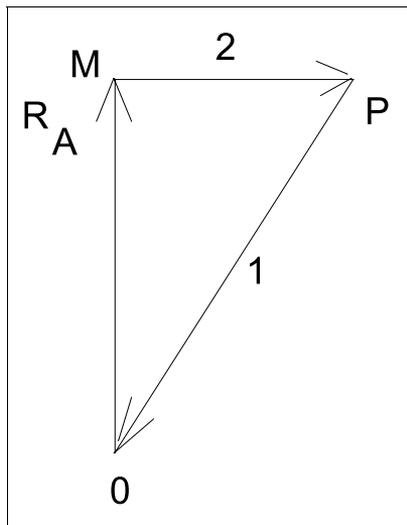


Figure 10.2. Épure de Crémona du nœud A .

Dans notre cas, la solution est immédiate : nous connaissons l'un des trois côtés, à savoir la réaction \vec{R}_A , et les directions des deux autres côtés, à savoir les directions des deux barres 1 et 2, puisque les forces sont dirigées dans le sens des barres. Il est ainsi possible de construire le triangle OMP , dans l'ordre où les différentes forces ont été trouvées, c'est-à-dire \vec{R}_A , 2 et 1, en traçant, à partir de l'extrémité M du vecteur $\vec{OM} = \vec{R}_A$, une parallèle à la barre 2, et à partir de O , une parallèle à la barre 1, les deux droites se coupant au point P .

Ainsi deux forces ont été déterminées : celles dans les barres 1 et 2.

Quant aux flèches, elles permettent de savoir si la barre est comprimée ou tendue : pour cela il suffit de reporter les forces, avec la flèche correspondante, sur le dessin

de la poutre. Par exemple, la force \overline{MP} reportée sur la barre 2 *s'éloigne* du nœud A : ceci indique que la barre 2 est **tendue**. Au contraire, la force \overline{PO} reportée sur la barre 1 *se dirige* vers le nœud A : la barre 1 est **comprimée** (figure 10.3).

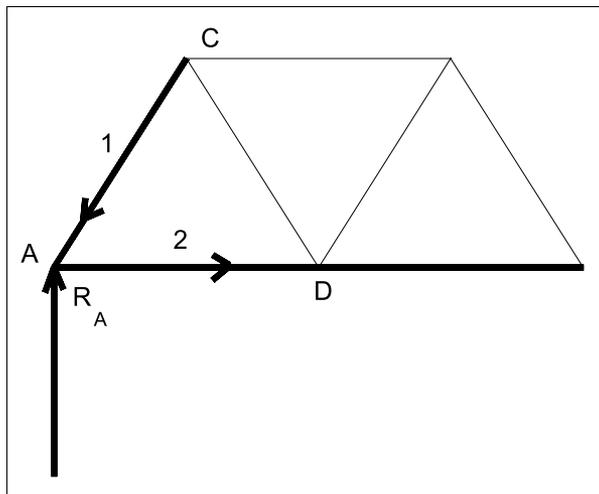


Figure 10.3. Équilibre du nœud A.

Étudions ensuite le nœud C.

En effet, il importe de passer au nœud C pour lequel deux inconnues subsistent, les efforts dans les barres 3 et 4, alors qu'au nœud D subsistent 3 inconnues : les efforts dans les barres 3, 5 et 6 (figure 10.1, page 122). Par la suite, lorsque nous connaîtrons l'effort dans la barre 3, il ne subsistera plus au nœud D que deux inconnues : les efforts dans les barres 5 et 6.

En tournant toujours de la droite vers la gauche, nous trouvons, dans l'ordre, la force $\overline{1}$, la force $\overline{3}$ et la force $\overline{4}$.

La force $\overline{1}$ est connue, puisque déterminée par l'épure de Crémone du triangle précédent. Toutefois, il faut considérer la force égale et opposée, c'est-à-dire la réaction opposée par le nœud C à la force appliquée en provenance de A. D'ailleurs, la barre 1, qui a été déterminée comme comprimée, dans l'équilibre du nœud A, l'est aussi dans l'équilibre du nœud C. Compte tenu des conventions indiquées ci-dessus, la force $\overline{1}$ doit donc se diriger vers le nœud C.

Pour construire l'épure de Crémone du nœud C, il faut donc opérer de la manière suivante :

- partir de la force connue, c'est-à-dire la force $\overline{1}$. Cette force existe déjà dans la figure 10.2, page précédente : c'est la force \overline{OP} .

Comme il faut changer de sens, il faut partir de O vers P. O et P sont donc les extrémités du côté connu du triangle d'équilibre des forces du nœud C ;

– le triangle se construit en traçant, à partir de P, une parallèle à la force $\vec{3}$, et à partir de O, une parallèle à la force $\vec{4}$. Les deux droites se coupent en Q, qui est le troisième sommet du triangle.

Pour le sens des flèches, il convient de considérer le graphique en partant de O, comme indiqué ci-dessus, en suivant les forces dans l'ordre où elles ont été trouvées, en tournant vers la gauche, c'est-à-dire $\vec{3}$, puis $\vec{4}$ (figure 10.4).

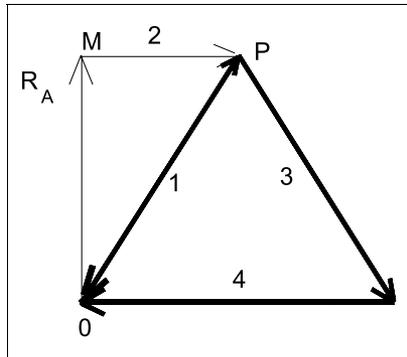


Figure 10.4. Épure de Crémona du nœud C.

Il faut ensuite passer au nœud D, où concourent cinq forces, dont seulement deux sont inconnues.

Considérons la force $\vec{3}$: au nœud C, cette force s'éloigne du point C ; au nœud D, elle s'éloigne aussi du point D, puisque la barre est tendue.

De la même manière, la barre 3, montrée comme étant tendue par l'épure de Crémona du nœud C, doit, elle aussi, s'éloigner du point D.

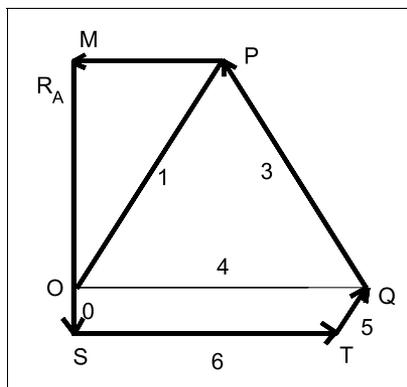


Figure 10.5. Épure de Crémona du nœud D.

Pour construire l'épure de Crémona, il faut garder pour la fin du tracé les deux forces inconnues. On commence par la barre 3, soit QP , puis la barre 2, soit PM , puis la force de 60 000 N, appliquée au nœud, soit le vecteur $M\vec{S}$.

S et Q sont donc les points à partir desquels on trace les parallèles aux forces $\vec{6}$ et $\vec{5}$, dans cet ordre, où on les a rencontrées en tournant vers la gauche, d'où l'épure de Crémona (figure 10.5, page précédente).

La poutre étant symétrique, l'ensemble des efforts dans les différentes barres est ainsi déterminé. Le lecteur est toutefois invité à continuer le tracé du Crémona qui doit le ramener au point origine O.

10.3. MÉTHODE DES SECTIONS

Partageons le système réticulé isostatique en deux au moyen d'une section (ou coupure) (S), rencontrant en général trois barres (figure 10.6). Pour conserver l'équilibre de la partie du système située à droite de la section, il faut que le système des forces **extérieures** appliquées à la partie du système située à gauche de la section soit équivalent au système des forces exercées sur la partie droite par les **barres rencontrées par la section**.

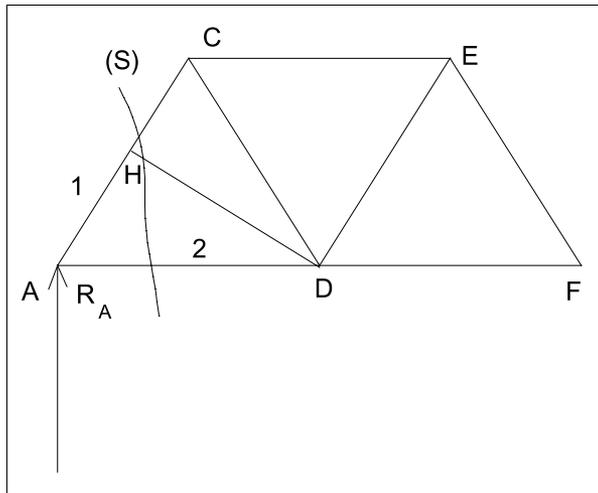


Figure 10.6. Coupure d'un système réticulé.

Par exemple, dans le cas de la figure 10.6, le système reste en équilibre si l'on remplace le système des forces situées à gauche de la section (S) par les forces exercées sur la partie droite par les barres AC et AD (figure 10.7 et figure 10.8, page suivante).

Pour trouver l'équilibre de la partie gauche, on peut utiliser les trois équations de la statique, mais il est souvent plus facile, d'utiliser uniquement l'équation indiquant

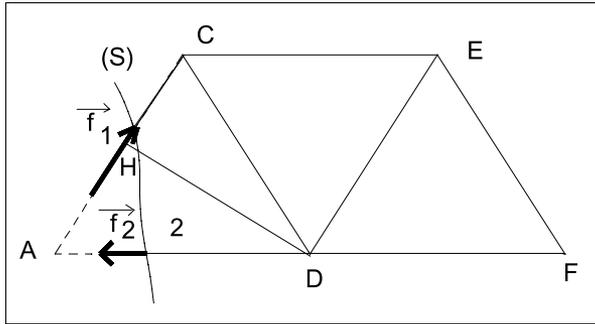


Figure 10.7. Forces équilibrant la partie droite de la coupure.

que le moment résultant par rapport à un point quelconque est nul, en choisissant judicieusement le point de sorte d'avoir une seule inconnue dans l'équation.

Par exemple, considérons le système de la figure 10.1, page 122. Coupons d'abord la poutre par une section (S) située entre A et CD. La partie gauche est en équilibre comme indiqué dans la figure 10.8.

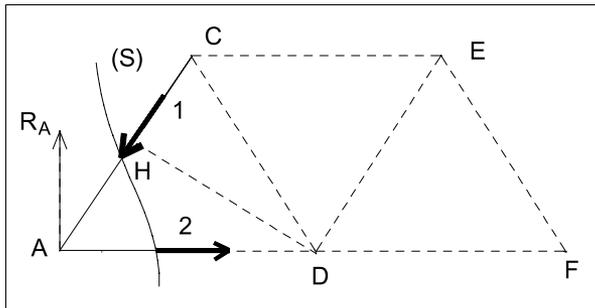


Figure 10.8. Forces équilibrant la partie à gauche de la coupure.

Le moment résultant par rapport à D est nul. D est choisi parce que le moment de la force de la barre AD est nul par rapport à ce point. Ainsi, il ne reste plus qu'une seule inconnue : l'effort dans la barre AC.

On obtient : $M/D = 0 = R_A \times AD + F_{AC} \times DH$

Nous remarquons immédiatement que la force \vec{F}_{AC} doit avoir le sens indiqué sur la figure 10.8. Sa grandeur absolue est :

$$F_{AC} = \frac{R_A \times AD}{DH}$$

Pour trouver la force \vec{F}_{AD} , il suffit de calculer le moment par rapport au point C. \vec{F}_{AD} a le sens indiqué sur la figure 10.8. Sa valeur est telle que :

$$F_{AD} = \frac{R_A \times LC}{CK}$$

Pour trouver les efforts dans les barres CD et CE, on coupe la poutre par une section (S'), telle que mentionné sur la figure 10.9. En considérant la partie gauche de (S'), les seules forces extérieures à cette partie sont la réaction \vec{R}_A et les efforts en CE, CD et AD.

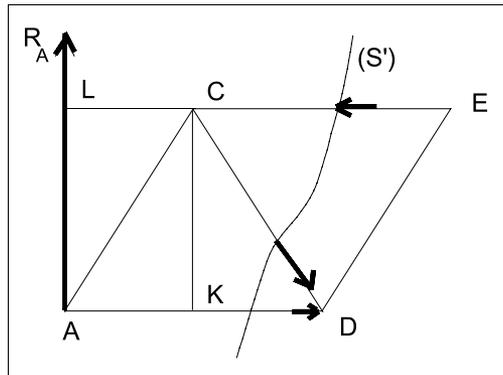


Figure 10.9. Forces exercées sur la partie gauche de la poutre, à droite de la section (S').

\vec{F}_{AD} est déjà connue : il ne reste plus que deux inconnues. Pour obtenir \vec{F}_{CE} , on calculera le moment par rapport à D.

Pour obtenir \vec{F}_{CD} , on calculera le moment par rapport à E.

La méthode des sections est beaucoup plus précise que la méthode de Crémona, lorsque les dimensions de la pièce sont connues avec exactitude.

10.4. EXERCICE : POUTRE TRIANGULÉE

➡ Énoncé

Considérons la poutre triangulée (figure 10.10, page suivante), reposant sur deux appuis simples A et D. Chaque barre a une longueur de 3 m. La poutre reçoit au nœud B une charge de 80 kN et au nœud C une charge de 20 kN.

1. Dessinez le *Crémona* du système. En déduire les efforts dans les barres.
2. Calculez les efforts dans les barres 1, 2, 3 et 4 par la méthode des sections.
3. Considérez les forces calculées précédemment pour le nœud G, et vérifiez que leur résultante est bien nulle.

➡ Solution

Vérifions d'abord que le système est bien isostatique. Le système compte 7 nœuds et 11 barres, soit $(2 \times 7) - 11 = 3$.

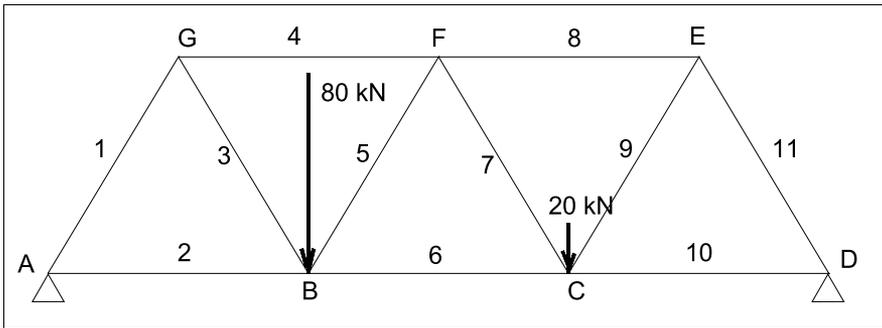


Figure 10.10. Poutre triangulée isostatique.

Calculons les réactions d'appui : $M/D = 0$ donne $R_A = 60$ kN, d'où $R_D = 40$ kN.

1. Épure de Crémona. Nous avons :

- $\overline{OP} = \vec{R}_A$;
- $\overline{NO} = \vec{R}_D$;
- $\overline{PM} =$ force extérieure de 80 kN ;
- $\overline{MN} =$ force extérieure de 20 kN.

Ce qui permet de dessiner l'épure de la figure 10.11.

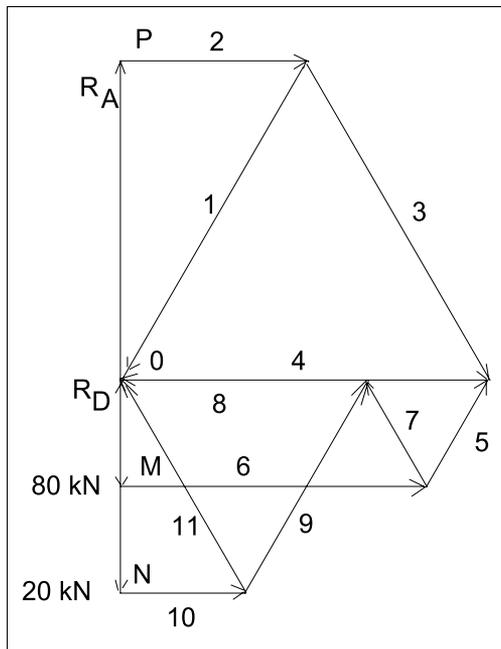


Figure 10.11. Épure de Crémona de la poutre.

La mesure sur le graphique donne les résultats consignés dans le tableau 10.1.

Barre	Comprimée	Tendue	Effort (en kN)
1	×		69
2		×	35
3		×	69
4	×		69
5		×	23
6		×	58
7	×		23
8	×		46
9		×	46
10		×	23
11	×		46

Tableau 10.1.

2. Méthode des sections :

Effectuons une coupure de la poutre par une section (S) (figure 10.12).

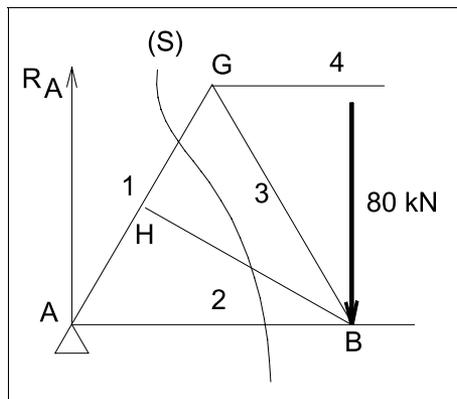


Figure 10.12. Coupure par une section (S).

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la force extérieure, c'est-à-dire la réaction $R_A = 60 \text{ kN}$, soit équilibrée par le système des forces intérieures, c'est-à-dire les efforts dans les barres 1 et 2. Le moment de ces forces par rapport à B étant nul, il est possible d'écrire, sachant que :

$$BH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$R_A \times 3 + F_1 \times 3 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

d'où (1) :

$$F_1 = -\frac{60 \times 2}{\sqrt{3}} = -69,2 \text{ kN}$$

La force \vec{F}_1 est dirigée vers le nœud A ; la barre 1 est donc comprimée. En prenant le moment par rapport à G, on obtient :

$$60 \times \frac{3}{2} + F_2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0 \text{ d'où } F_2 = \frac{-60}{\sqrt{3}} = -34,6 \text{ kN}$$

La force \vec{F}_2 s'éloigne du nœud A : la barre 2 est donc tendue.

Coupons maintenant par une section (S') (figure 10.13).

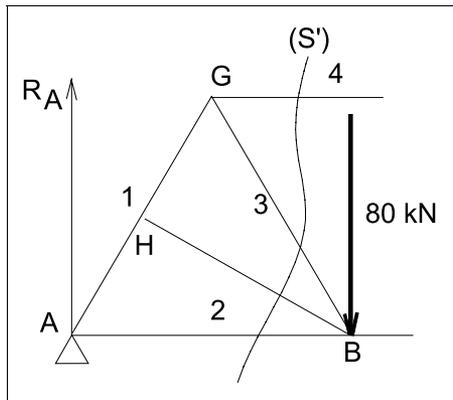


Figure 10.13. Coupure par une section (S').

La seule force extérieure est toujours la réaction en A. Elle est équilibrée par les efforts dans les barres coupées par la section : 2, 3 et 4.

La barre 1, non coupée, assure son propre équilibre et n'intervient plus par conséquent. Calculons le moment par rapport à B :

$$60 \times 3 + F_4 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0 \text{ d'où } F_4 = -69,2 \text{ kN}$$

La force \vec{F}_4 est dirigée vers le nœud G : la barre 4 est donc comprimée. Pour trouver l'effort dans la barre 3, il faut calculer le moment par rapport à F :

$$60 \times 4,5 + F_2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} + F_3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$

1. Les signes des forces déduits des équations sont ceux des moments de ces forces par rapport au point considéré; on en déduit alors le sens des forces et la nature de l'effort qui s'exerce dans la barre (compression ou tension).

En remplaçant F_2 par sa valeur trouvée précédemment ($-34,6$ kN), on calcule $F_3 = -69,2$ kN. La force étant dirigée vers la nœud B, la barre 3 est tendue.

3. Équilibre du nœud G

Le nœud G est soumis à trois forces égales et disposées à 120° , si on les fait glisser de manière à placer l'origine en G : l'équilibre est bien assuré (figure 10.14).

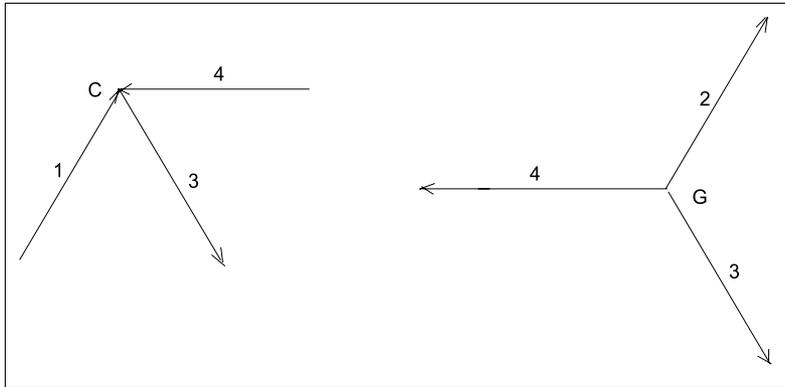


Figure 10.14. Équilibre du nœud G.

Il s'agit d'une méthode rapide de *vérification* d'un Crémona.

Stabilité de l'équilibre élastique

11

11.1. INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents ont été étudiés des poutres et des systèmes de poutres en supposant les déformations de ces poutres infiniment petites, c'est-à-dire en négligeant ces déformations pour le calcul des différents effets : effort normal, effort tranchant et moment fléchissant.

Dans ces conditions, la superposition de plusieurs états d'équilibre donnait un nouvel état d'équilibre (principe de la superposition des états d'équilibre).

Or, il n'en est pas toujours ainsi dans la réalité, puisqu'il peut arriver d'obtenir des déformations très grandes sous l'effet de forces relativement modérées. Ces phénomènes sont connus sous le nom d'*instabilité élastique*. Le plus courant est celui du *flambement* d'une poutre élancée sous l'action d'un effort normal de compression. Par exemple, une canne très fine sur laquelle on s'appuie fortement, se déforme en se courbant, puis casse, par flexion.

Dans le cas de la canne, si l'effort normal de compression était parfaitement situé dans l'axe de la canne, il y aurait écrasement du matériau et non rupture par flexion.

La flexion préalable ne peut provenir que d'un excentrement de la force de compression \bar{F} par rapport à l'axe de la canne, l'excentrement relatif étant d'autant plus grand que le diamètre de la canne est faible (figure 11.1, page suivante).

Mais dans d'autres cas, la flexion peut être produite par un moment de flexion appliqué à la poutre du fait de la disposition des forces extérieures (poids propre, vent, neige, etc.) (figure 11.1, page suivante).

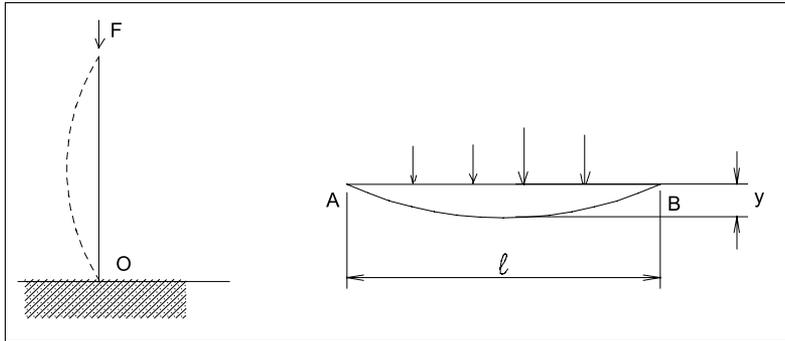


Figure 11.1. Flambement d'une canne (à gauche) et déformation d'une poutre (à droite).

Dans ce chapitre, les deux cas suivants seront étudiés :

- poutres à la fois comprimées et fléchies,
- poutres seulement comprimées : c'est le phénomène du flambement.

11.2. POUTRE SUR APPUIS SIMPLES, DE SECTION CONSTANTE, COMPRIMÉE ET FLÉCHIE

La poutre, sur appuis simples A et B, est supposée horizontale. Elle supporte un système de charges verticales produisant dans la poutre un moment fléchissant $m(x)$. Par ailleurs, elle est soumise à un effort normal \bar{F} appliqué à ses extrémités (figure 11.2).

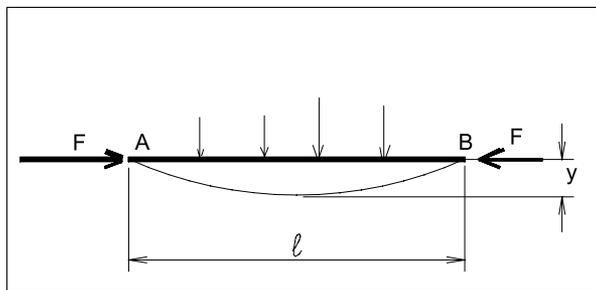


Figure 11.2. Poutre comprimée et fléchie.

Tant que la déformation de la poutre peut être négligée (y infiniment petit), il s'agit d'un simple cas de flexion composée. En revanche, si y n'est pas négligeable, le moment fléchissant par rapport au centre de gravité de la poutre, c'est-à-dire par rapport au point correspondant de la fibre moyenne déformée, devient : $M(x) = m(x) - F \cdot y$ ⁽¹⁾

1. Le signe – provient du fait que y est négatif dans le cas considéré. Si y était positif, le moment serait alors négatif, et nous aurions encore la même formule.

Il en résulte que l'équation différentielle donnant y est :

$$y'' = \frac{M(x)}{EI} = \frac{1}{EI}[m(x) - Fy]$$

La solution de cette équation différentielle est telle que y tend vers l'infini lorsque \bar{F} tend vers une force telle que :

$$F_C = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

Cette force, de grandeur finie, est appelée *force critique de flambement*. La force F doit donc rester inférieure à F_C , pour éviter que les déformations de la poutre ne s'amplifient.

Il faut remarquer que la force critique est indépendante du moment fléchissant $m(x)$ appliqué à la poutre.

11.3. FLAMBEMENT DES POUTRES DROITES DE SECTION CONSTANTE

11.3.1. POUTRE ARTICULÉE À SES EXTRÉMITÉS

Considérons une poutre droite OO' , articulée à ses extrémités et soumise à un effort normal de compression \bar{F} . Soit S l'aire de sa section supposée constante.

On pourrait penser, a priori, que lorsque F croît, la ruine de la poutre intervient lorsque la contrainte $\sigma = F/S$, supposée répartie sur toute la section, dépasse la limite élastique. Or, il peut en être autrement lorsque les dimensions transversales de la poutre sont faibles vis-à-vis de sa longueur ℓ , puisque l'équilibre de la poutre peut devenir instable bien avant que la contrainte n'atteigne la limite élastique.

En effet, supposons que la poutre soit légèrement fléchie (figure 11.3, page suivante). En tout point d'abscisse x (à partir de O), elle est soumise, outre à l'effort normal de compression, à un moment fléchissant $M = -Fy$. La flèche est déterminée par l'équation :

$$y'' = \frac{M(x)}{EI} = \frac{-Fy}{EI}, \text{ soit l'équation différentielle : } y'' + \frac{Fy}{EI} = 0$$

Cette équation a une infinité de solutions, dont la plus faible valeur est donnée par l'expression ⁽²⁾ :

$$F_C = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

2. L'intégrale générale de l'équation différentielle est $y = A \cos kx + B \sin kx$, avec $k^2 = F/EI$. La condition $y = 0$ pour $x = 0$ donne $A = 0$, d'où $y = B \sin kx$. La condition $y = 0$ pour $x = \ell$ donne $\sin k\ell = 0$, d'où la formule indiquée.

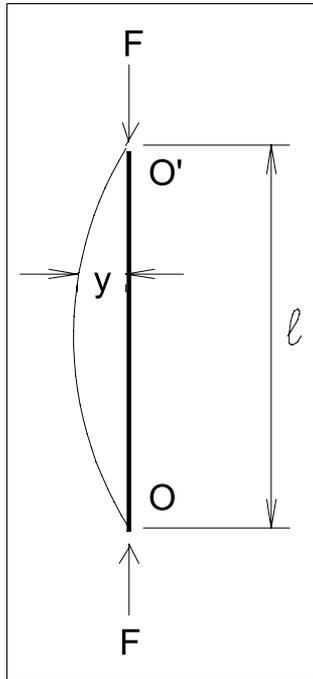


Figure 11.3. Poutre fléchie soumise à un effort de compression.

F_C est appelée force critique de flambement (ou force critique d'Euler). Si la force F est supérieure à F_C , la déformation augmente considérablement, et la poutre se rompt, ou bien, si elle est très élancée (lame mince, par exemple), elle prend une position d'équilibre très déformée : de toutes façons, la poutre devient inutilisable.

Par exemple, si F dépasse F_C de 1,5% seulement, la flèche maximum de la poutre atteint 11% de sa longueur.

11.3.2. POUTRES SOUMISES À DES CONDITIONS AUX LIMITES DIVERSES

Les résultats précédents concernent la poutre articulée à ses deux extrémités. Ces résultats sont fondamentaux et servent de référence à tous les autres cas considérés ci-après.

• Poutre encastree à l'une de ses extrémités, et libre à l'autre (mât)

Le flambement est identique à celui d'une poutre articulée à ses deux extrémités de longueur $2l$ (figure 11.4, page suivante). D'où :

$$F_C = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

soit seulement le quart de la valeur de référence.

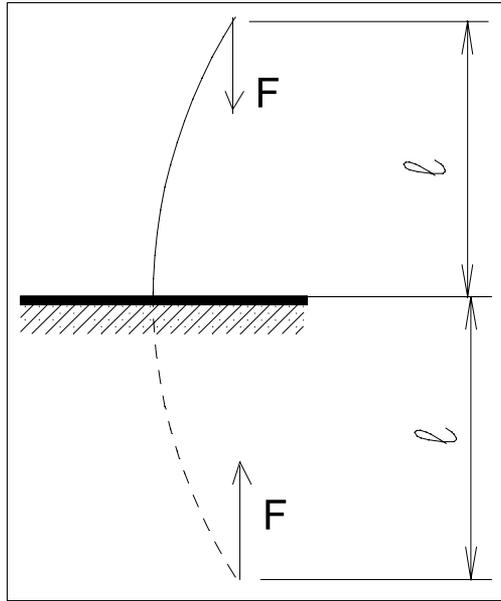


Figure 11.4. Flambement d'un mât.

• **Poutre encastrée à ses deux extrémités**

F_C est le quadruple de la valeur de référence.

D'une manière générale, il est admis : $F_C = m\pi^2 EI / \ell^2$, m étant le coefficient numérique dépendant du mode de fixation de la pièce à ses deux extrémités. Il est donné dans le tableau 11.1.

m	Mode de fixation aux extrémités
1	pièce articulée à ses deux extrémités
4	pièce parfaitement encastrée à ses deux extrémités
2	pièce demi encastrée à ses deux extrémités
2	pièce articulée à une extrémité et parfaitement encastrée à l'autre
1/4	pièce encastrée à une extrémité et libre à l'autre (mât)

Tableau 11.1.

Remarque

Lorsque la poutre peut flamber dans un plan quelconque, il faut considérer le moment d'inertie minimum de la section.

11.3.3. SÉCURITÉ VIS-À-VIS DU FLAMBEMENT - CONTRAINTES ADMISSIBLES

Considérons une poutre comprimée de section S , d'inertie I , articulée à ses extrémités ; la *contrainte critique* σ_k est définie par la formule :

$$\sigma_k = \frac{F_C}{S} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2 S}$$

En appelant $r = \sqrt{I/S}$ le *rayon de giration* de la poutre et $\lambda = \ell / r$ l'*élancement* de la poutre, la contrainte critique devient :

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Supposons que la poutre soit parfaitement rectiligne, que l'effort \bar{F} soit centré et que le matériau dont elle est constituée soit parfaitement homogène :

- si la contrainte σ_k est $< \sigma_e$ (limite élastique), c'est-à-dire si $\lambda > \pi \sqrt{E/\sigma_e}$, la poutre périra par écrasement dès que le rapport F/S atteindra la valeur σ_k ;
- si $\sigma_k > \sigma_e$, la poutre périra par écrasement dès que F/S atteindra la valeur σ_e .
- si, d'autre part : la poutre a un défaut de rectitude, ou bien les forces de compression aux extrémités de la poutre ne sont pas bien centrées, alors la contrainte réelle maximale subie par la poutre sera supérieure à la contrainte normale $\sigma = F/S$.

D'une façon générale, la contrainte maximale est donnée par une expression de la forme :

$$\sigma_m = \frac{F}{S} [1 + a(\lambda)] \text{ où } a \text{ est un terme fonction de l'élancement } \lambda.$$

On peut citer, parmi ces expressions, celle donnée par Rankine, en ce qui concerne les pièces en acier, soit :

$$\sigma_m = \frac{F}{S} \left[1 + \frac{\lambda^2}{10\,000} \right]$$

Il suffit alors de vérifier que σ_m est inférieur à la contrainte admissible dans le cas considéré.

11.4. PRESCRIPTIONS DES RÈGLEMENTS EN VIGUEUR

Les règlements cités sont ceux relatifs aux constructions métalliques et au béton armé.

11.4.1. REGLEMENTS RELATIFS AUX CONSTRUCTIONS METALLIQUES

Nous distinguerons les constructions métalliques, en général, et les ouvrages métalliques construits pour les collectivités publiques.

11.4.1.1. Règles de calcul des constructions en acier : Règles CM 1966 et l'additif 80

Elles sont fondées sur la méthode *Dutheil* dont les principes sont donnés ci-après.

Cette méthode part du constat (*cf.* § 11.3.1) que dès qu'une barre (même jugée parfaitement droite), est soumise à une compression, elle s'infléchit légèrement, ce qui induit un moment fléchissant s'ajoutant à l'effort normal : la vérification de la stabilité des pièces comprimées (avec ou sans flexion d'origine extérieure) est ainsi ramenée à un problème de flexion composée.

La résolution du problème présente les deux particularités suivantes :

- au lieu d'étudier l'équilibre des forces et les sollicitations en chaque point de la pièce, comme dans les cas courants où les déformations ont une influence négligeable sur ces sollicitations, on tient compte des déformations et de leur amplification par l'effet de la compression,
- à partir de résultats expérimentaux et de leur interprétation par les méthodes de la statistique mathématique, on a pu déterminer une valeur limite de la flèche, qui permet de vérifier que la barre envisagée supportera avec une sécurité suffisante les charges auxquelles il est envisagé de la soumettre.

Pour les pièces ayant des parois pleines, la vérification consiste à ne pas dépasser une contrainte σ , telle que $k\sigma < \sigma_e$ où k est un coefficient dépendant du rapport $\sigma_e \lambda^2 / \pi^2 E$, c'est-à-dire uniquement de la limite d'élasticité du matériau et de l'élançement de la pièce.

Nous donnons (tableau 11.2) quelques valeurs de k en fonction de λ et de σ_e ainsi que la valeur de la contrainte critique d'Euler σ_k , calculée avec $E = 210\,000$ MPa.

Élançement λ	k ($\sigma_e = 240$ MPa)	k ($\sigma_e = 300$ MPa)	k ($\sigma_e = 360$ MPa)	σ_k (MPa)
10	1,004	1,004	1,005	20 730
50	1,117	1,158	1,204	829
100	1,894	2,234	2,586	207,3
150	3,679	4,512	5,35	92,1
200	6,28	7,782	9,28	51,8
250	9,66	12,01	14,36	33,2

Tableau 11.2.

Remarque

On s'affranchit du coefficient m défini ci-dessus, en considérant une longueur de flambement ℓ_e égale à $2\ell_0$ dans le cas du mât, $1/2\ell_0$ dans le cas de la pièce encastree à ses deux extrémités, etc.

11.4.1.2. Cahier des prescriptions communes applicables aux marchés de travaux publics passés au nom de l'État, fascicule 61, titre V : Conception et calcul des ponts et constructions métalliques en acier

Il s'agit du décret du 22 juin 1977 et de la circulaire du 18 février 1978. À noter que l'expression *Cahier des Prescriptions Communes*, en usage en 1978, doit être remplacée actuellement par l'expression *Cahier des Clauses Techniques Générales (CCTG)*.

Dans la majorité des cas, les règles adoptées sont semblables à celles des règles CM 66. Toutefois, en matière de flambement, les règles diffèrent *volontairement* de celles de la méthode Dutheil, étant établies à partir d'autres études expérimentales.

Les notations et les règles sont les suivantes :

- σ^* désigne la contrainte critique d'Euler : $\sigma^* = m\pi^2 E / \lambda^2$,
- σ_e désigne la limite d'élasticité de l'acier.

Si σ_m désigne la contrainte de compression de la pièce considérée, on vérifie que $\sigma_m \leq \bar{\sigma}_m$ avec :

$$\bar{\sigma}_m = \sigma_e \left(1 - 0,375 \frac{\sigma_e}{\sigma^*} \right) \text{ si } \sigma^* \geq 0,75\sigma_e$$

$$\bar{\sigma}_m = 0,66\sigma^* \text{ si } \sigma^* \leq 0,75\sigma_e$$

Pour les pièces très courtes, telles que $\lambda \leq 20$, on peut se contenter de vérifier $\sigma_m \leq \sigma_e$.

11.4.2. RÈGLEMENT RELATIF AU BÉTON ARMÉ

Les règles applicables en matière de béton armé sont les règles dites BAEL 91 (*Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états limites*). Ces règles ont été rendues obligatoires, sous forme de fascicule 62 du CCTG, par le décret n° 92-72 du 16 janvier 1992.

Les règles BAEL 91 ont été légèrement modifiées en 1999, mais ces modifications ne portent pas sur le flambement.

En matière de flambement, les règles concernent les poteaux. Tout d'abord, les longueurs de flambement à prendre en compte sont celles données dans le tableau 11.1, page 137, en ce qui concerne les poteaux isolés.

Pour les bâtiments à étages qui sont contreventés par un système de pans verticaux (avec triangulations, voiles en béton armé ou maçonnerie de résistance suffisante) et où la continuité des poteaux et de leur section a été assurée, la longueur de flambement est prise égale à :

- $0,7\ell_0$ si le poteau est encasté à ses extrémités :
 - soit encasté dans un massif de fondation,
 - soit assemblé à des poutres de plancher ayant au moins la même raideur que lui dans le sens considéré et le traversant de part en part.
- ℓ_0 dans tous les autres cas.

En ce qui concerne la résistance des poteaux, et pour un élancement inférieur ou égal à 50, il est fait application d'un coefficient réducteur, défini par :

$$\alpha = \frac{0,85}{1 + 0,2(\lambda/35)^2}$$

semblable au coefficient k des règles CM 66 (cf. § 11.4.1.1) mais avec la valeur $1/k$. Par exemple, pour $\lambda = 35$, $\alpha = 0,708$ ($1/k$ est de l'ordre de 0,90).

Lorsque l'élancement est compris entre 50 et 70, la valeur de α devient :

$$\alpha = 0,60\left(\frac{50}{\lambda}\right)^2$$

Pour $\lambda = 70$, $\alpha = 0,306$ et la valeur de $1/k$ est de l'ordre de 0,65.

11.5. EXERCICES

11.5.1. BARRE D'ACIER DE SECTION RECTANGULAIRE

Énoncé

Considérons une barre d'acier de 0,50 m de longueur et de section rectangulaire : 50×20 mm, supposée articulée à ses extrémités.

1. Indiquer comment périra la barre :
 - dans le cas où elle est constituée en acier de limite élastique 240 MPa,
 - dans le cas où elle est constituée en acier de limite élastique 360 MPa.
2. Quelle force sera-t-il nécessaire d'appliquer à son extrémité libre, pour la faire flamber, en supposant que la barre n'est plus articulée, mais encastée à une extrémité et libre à l'autre.

On prendra comme module d'élasticité de l'acier $E = 210\,000$ MPa.

Solution

1. Le moment d'inertie à prendre en compte est le plus petit, c'est-à-dire celui pris par rapport à la médiatrice de la petite base. Si la barre se plie, ce sera par rapport à cet axe et non par rapport à l'axe perpendiculaire.

On trouve :

$$I = \frac{5 \times 2^3}{12} = \frac{10}{3} \text{ cm}^4$$

L'aire de la section est $S = 10 \text{ cm}^2$. Le rayon de giration est donc :

$$r = \sqrt{\frac{I}{S}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577 \text{ cm et l'élanement } \lambda = \frac{\ell}{r} = \frac{50}{0,577} = 86,6$$

L'élanement critique est :

$$\lambda_c = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}}$$

– dans le cas où $\sigma_e = 240 \text{ MPa}$,

$$\lambda_c = \pi \sqrt{210\,000/240} = 93$$

L'élanement de la poutre est inférieur à l'élanement critique. La poutre périra par écrasement sans flambement, lorsque la contrainte normale F/S atteindra 240 MPa ;

– dans le cas où $\sigma_e = 360 \text{ MPa}$,

$$\lambda_c = \pi \sqrt{210\,000/360} = 76$$

L'élanement de la poutre est supérieur à l'élanement critique. La poutre périra donc par flambement lorsque le rapport F/S atteindra la contrainte critique :

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 210\,000}{86,6^2} = 276 \text{ MPa} (< 360 \text{ MPa})$$

2. La barre étant encastree à une extrémité, libre à l'autre, la force critique de flambement est (en utilisant comme unités le newton et le mm) :

$$F_c = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 \times 210\,000 \times 100\,000}{4 \times 250\,000 \times 3} = 69\,088 \text{ N}$$

La contrainte critique est alors $\sigma_k = 69\,088/1000 = 69,088 \text{ N/mm}^2$ ou 69,088 MPa nettement inférieure à la limite élastique.

Remarque

Selon les règles CM 66, pour un élanement de $86,6 \times 2 = 173,2$, la valeur de k est de l'ordre de 7 pour 360 MPa de limite élastique.

La contrainte admissible est alors de $360/7 = 51,4 \text{ MPa}$, soit moins que la contrainte critique d'Euler.

Avec le CCTG, la contrainte maximale serait égale à $0,66 \times 70 = 46,2 \text{ MPa}$, soit du même ordre que le résultat précédent, mais légèrement en dessous.

11.5.2. POTEAU COMPRIMÉ

➡ Énoncé

Considérons un poteau comprimé de section $S = 400 \text{ mm}^2$ et de longueur 1 m.

1. Calculez la contrainte critique d'Euler dans le cas où la section a la forme :
 - d'un carré,
 - d'un rectangle de longueur quintuple de la largeur (considéré dans sa position la plus défavorable pour le flambement),
 - d'un cercle,
 - d'une couronne circulaire de diamètre intérieur de 20 mm (cas d'un tube).

On résumera les différents calculs dans un tableau faisant apparaître, en colonnes :

- les moments d'inertie,
- les rayons de giration,
- les élancements,
- les contraintes critiques d'Euler.

On prendra comme valeur du module de Young : $E = 210\,000 \text{ MPa}$.

2. Sachant que la pièce est constituée d'acier doux de limite élastique $\sigma_e = 240 \text{ MPa}$, et qu'elle est soumise à une force de compression simple $F = 16\,000 \text{ N}$, calculez dans chaque cas la contrainte maximale donnée par la formule de Rankine. La comparer à la valeur admissible.
3. Calculez la valeur du coefficient k des règles CM 66. On interpolera entre les différentes valeurs du tableau donné dans le cours au paragraphe 11.4.1.1.

Calculez la contrainte de compression simple, puis le produit $k\sigma$. Comparez à la limite élastique.

Observez ce que donne l'application des règles du CCTG.

➡ Solution

1. Calcul de la contrainte critique d'Euler :

– pour la section carrée :
 le côté est $a = 20 \text{ mm}$ donc $I = a^4/12 = 13\,333 \text{ mm}^4$, $r = \sqrt{I/S} = \sqrt{13\,333/400} = 5,78 \text{ mm}$, $\lambda = 1\,000/5,78 = 173$, $\sigma_k = \pi^2 E/\lambda^2 = 69,2 \text{ MPa}$;

– pour la section rectangulaire :
 la position la plus défavorable est celle où l'axe de flexion est parallèle au grand côté.

$b = \sqrt{400 \times 5} = 44,72 \text{ mm}$, $h = 8,94 \text{ mm}$, $I = bh^3/12 = 2\,666,67 \text{ mm}^4$,
 $r = \sqrt{I/S} = 2,58 \text{ mm}$, $\lambda = 1000/2,58 = 387,6$, $\sigma_k = 13,8 \text{ MPa}$;

– pour la section circulaire :
 $R = \sqrt{400/\pi} = 11,28 \text{ mm}$, $I = \pi R^4/4 = 12\,732 \text{ mm}^4$, $r = \sqrt{12\,732/400} = 5,64 \text{ mm}$, $\lambda = 1\,000/5,64 = 177$, $\sigma_k = 66,2 \text{ MPa}$;

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

– Pour la couronne :

$$S = \frac{\pi}{4}(D^2 - 400) = 400 \text{ mm}^2 \text{ d'où } D^2 = 909,3 \text{ mm}^2$$

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - 20^4) = 32\,733 \text{ mm}^4$$

$$r = \sqrt{32\,733/400} = 9,05 \text{ mm}, \lambda = 1\,000/9,05 = 110,5, \sigma_k = 169,7 \text{ MPa.}$$

Section	I (mm ⁴)	r (mm)	λ	σ_k (MPa)
Carré	13 333	5,78	173	69,2
Rectangle	2 667	2,58	388	13,8
Cercle	12 732	5,64	177	66,2
Couronne	32 733	9,05	110,5	169,7

Tableau 11.3. Résultats pour les différentes formes.

On voit l'avantage net de la couronne et, en revanche, le faible intérêt du rectangle. En effet, pour une même section de 400 mm², la contrainte critique d'Euler, et donc la faculté de supporter une charge, est, pour la couronne, treize fois celle du rectangle allongé.

2. Application de la formule de Rankine :

Section	λ	$1 + \lambda^2/10\,000$	σ_m (MPa)
Carré	173	3,99	159,6
Rectangle	388	16,05	642
Cercle	177	4,13	165,2
Couronne	110,5	2,22	88,8

Tableau 11.4. Contrainte maximale donnée par la formule de Rankine.

Seuls le carré et la couronne subissent une contrainte inférieure à la contrainte admissible, qui est ici les deux tiers de 240, soit 160 MPa. Le cercle est très proche, mais le rectangle, ici aussi, n'est vraiment pas la bonne solution.

3. Application des règles CM 66 :

Nous retrouvons à peu près les mêmes résultats qu'avec la formule de Rankine : le rectangle est à écarter; carré et cercle donnent des résultats voisins valables (avec un léger avantage pour le carré); excellents résultats de la couronne.

λ	k	$k\sigma$ (MPa)
173	4,78	191,2
388	> 20	> 800
177	4,99	199,6
110,5	2,19	87,6

Tableau 11.5. Calcul du coefficient k des règles CM 66.

Pour l'application du CCTG, la contrainte critique d'Euler étant, dans tous les cas, inférieure aux trois quarts de la limite élastique, la formule à appliquer est la deuxième :

$$\bar{\sigma}_m = 0,66 \sigma^*$$

Ce qui donne, pour la contrainte maximale admissible, exprimée en MPa :

- pour le carré : 45,7
- pour le rectangle : 9,1
- pour le cercle : 43,7
- pour la couronne : 112

Ces résultats sont à comparer à la division par k de la limite élastique, soit :

- pour le carré : 50,2
- pour le rectangle : < 12
- pour le cercle : 48,1
- pour la couronne : 109,6

On retrouve des résultats très voisins.

Rappels d'analyse mathématique

A

ANNEXE

A.1. FONCTION DÉRIVÉE

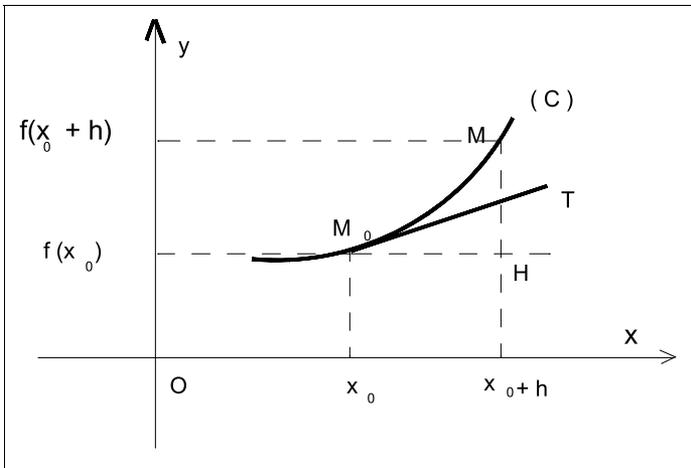


Figure A.1. Exemple de fonction $f(x)$ définie et continue au voisinage du point x_0 .

Si l'on considère une fonction $f(x)$ définie et continue au voisinage d'un nombre réel x_0 (figure A.1), la dérivée de la fonction f au point x_0 , est la limite $f'(x_0)$ du rapport des accroissements de la fonction f et de la variable x :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ lorsque } h \text{ tend vers } 0.$$

Sur la courbe représentative de la fonction f , la dérivée représente la pente de la tangente M_0T à cette courbe.

L'équation de la tangente à la courbe, au point d'abscisse x_0 , est ainsi donnée par :

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0)$$

A.1.1. EXEMPLE : FONCTION LINÉAIRE

$y(x) = ax$, donc $y(x + h) = a(x + h)$,

$$\text{d'où } \Delta y = ah \text{ et } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ah}{h} = a$$

A.1.2. EXEMPLE : FONCTION DU SECOND DEGRÉ

$$y = bx^2, \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b(x^2 + 2xh + h^2) - bx^2}{h} = \frac{2bxh + bh^2}{h}$$

Cette dernière valeur est égale à $2bx + bh$; elle tend vers $2bx$ lorsque h tend vers 0.

A.1.3. EXEMPLE : FONCTION DE DEGRÉ n

$$y = kx^n, y' = knx^{n-1}$$

La fonction f' définie précédemment est appelée **dérivée première** de la fonction f .

Si cette fonction f' est elle-même continue, elle peut être dérivée afin d'obtenir la **dérivée seconde** $f'' = (f')'$.

A.1.4. DÉRIVÉES D'UNE SOMME, D'UN PRODUIT, OU D'UN QUOTIENT DE FONCTIONS DÉRIVABLES

Soient u et v deux fonctions dérivables, de dérivées u' et v' . On démontre que :

$$(u + v)' = u' + v' \quad \text{et} \quad (u \times v)' = u \times v' + u' \times v$$

On en déduit :

$$(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$$

En ce qui concerne la fonction racine carrée, on peut écrire :

$$\sqrt{u} = u^{1/2} \text{ d'où } (\sqrt{u})' = \frac{1}{2}u^{-1/2}u' \text{ soit } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

A.1.5. DÉRIVÉE D'UNE FONCTION DE FONCTION

Soit $h(x) = g[f(x)]$, où g et f sont des fonctions dérivables. La dérivée de h est $h'(x) = g'(f) \times f'(x)$.

Par exemple, calculons la dérivée de $\sin(ax + b)$. Avec les notations précédentes, nous avons $f(x) = ax + b$ et $g = \sin$. La dérivée est $\cos(ax + b) \times a = a \cos(ax + b)$.

A.1.6. RAPPEL DE QUELQUES DÉRIVÉES DE FONCTIONS

$$(\sin a)' = \cos a; (\cos a)' = -\sin a; (\tan a)' = 1 + \tan^2 a;$$

$$(e^x)' = e^x; (a^x)' = a^x \text{Log } a; (\text{Log } x)' = 1/x; (\text{Log}_a x)' = 1/x \text{Log } a$$

A.1.7. DÉRIVÉE DE LA FONCTION RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION DÉRIVABLE

Soit f^{-1} la fonction réciproque de la fonction f . Si la fonction réciproque est dérivable et si $f'(x)$ n'est pas nul, on a :

$$(f^{-1})' [f(x)] = \frac{1}{f'(x)}$$

Par exemple, soit la fonction $x = g(y) = y^n$. La fonction réciproque est $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ (si $x > 0$).

On a : $g'(y) = ny^{n-1}$. L'application de la formule précédente donne :

$$f'[g(y)] = \frac{1}{ny^{n-1}} \text{ d'où } f'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

On obtient le même résultat en utilisant la notation différentielle suivante :

$$x = y^n \rightarrow dx = ny^{n-1} dy \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

A.2. NOTION D'INTÉGRALE DÉFINIE

Considérons une fonction $y = f(x)$ représentée par une courbe AB, et deux abscisses x_0 et $x_0 + dx$, dx étant une longueur infiniment petite (figure A.2, page suivante).

L'aire délimitée par les quatre points H, M, N et H' est comprise entre le rectangle HMM'H' de surface $y_0 \times dx$ et le rectangle HN'NH' de surface $(y_0 + dy) \times dx$. Lorsque dx tend vers 0, l'aire considérée tend vers la valeur $dA = y_0 \times dx$.

Si l'on fait varier x entre les deux valeurs extrêmes a et b , l'aire totale A , définie par les quatre points a, A, B, et b, est la somme des aires élémentaires dA :

$$A = \sum dA. \text{ On écrit : } A = \int_a^b f(x) dx$$

Cette aire représente l'**intégrale définie** de la fonction $y = f(x)$ entre les abscisses a et b .

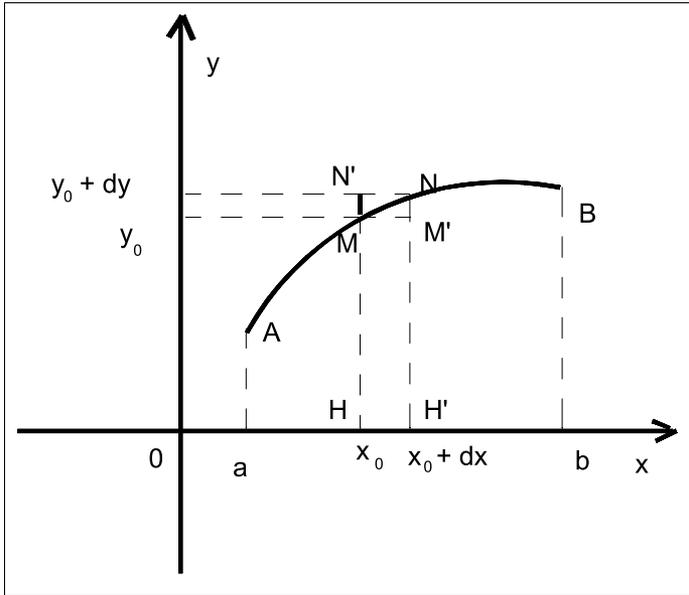


Figure A.2. Fonction $y = f(x)$ représentée par une courbe AB.

A.2.1. PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE DÉFINIE

Elles se déduisent des considérations géométriques précédentes :

1. $\int_a^a f(x) dx = 0$
2. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
3. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ (relation de Chasles)
quelle que soit la position de c par rapport à a et b .
4. $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ si k est une fonction constante.

Il en résulte une règle pratique : pour simplifier les calculs, il faut placer les facteurs constants devant le signe *somme*.

A.2.2. FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE

Nous avons considéré une intégrale définie entre deux abscisses a et b . Sur l'intervalle (a, x) où x est situé entre a et b , l'aire définie précédemment est une fonction de x :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Nous avons changé le nom de la variable d'intégration, puisque la variable x correspond à une borne de l'intégrale définie.

La fonction F est continue sur (a, b) . Elle est dérivable en tout point de (a, b) où f est continue et sa dérivée est $F'(x) = f(x)$.

A.3. FONCTIONS PRIMITIVES

A.3.1. DÉFINITION

Soit une fonction f , définie sur un intervalle I . On nomme **fonction primitive** de la fonction f sur l'intervalle I , toute fonction F dont la fonction dérivée première, F' , sur l'intervalle I , est f .

Si l'on reprend les résultats du paragraphe précédent (A.2), si a et x appartiennent à l'intervalle I , la fonction $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une fonction primitive de f sur I .

a étant un nombre réel quelconque sur l'intervalle I , il en résulte qu'il existe une infinité de *primitives* de la fonction f . On peut donc écrire :

si F est une primitive de f , toute primitive de f est définie par $(F + C)$ où C représente une fonction constante.

On désigne souvent C par le terme *constante d'intégration*.

A.3.2. FONCTION PRIMITIVE DE VALEUR DONNÉE EN UN POINT DONNÉ

Si F est une fonction primitive de f , pour que $G = F + C$ ait, en un point x_0 une valeur donnée $G(x_0)$, il faut et il suffit que $C = G(x_0) - F(x_0)$.

On peut écrire ce résultat de la façon suivante :

$$G(x) - G(x_0) = F(x) - F(x_0)$$

Si l'on prend, par exemple, une fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ et que l'on veuille déterminer la fonction primitive telle que $F(1) = 0$, on calcule :

$$F(x) = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + C$$

La condition $F(1) = 0$ s'écrit :

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c + C = 0 \text{ d'où } C = -\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c\right)$$

La fonction primitive cherchée est ainsi :

$$F(x) = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx - \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c\right)$$

Une telle condition de valeur donnée d'une primitive se retrouve dans le calcul des flèches en résistance des matériaux ; par exemple : flèche nulle sur un appui.

De telles conditions s'appellent parfois *conditions aux limites*.

A.3.3. RELATION ENTRE INTÉGRALE DÉFINIE ET PRIMITIVE

Soit la fonction f , définie et continue sur un intervalle $I = (u, v)$, et soient a et b , des nombres réels de cet intervalle.

La fonction F définie par $F(x) = \int_u^x f(t) dt$ est une primitive particulière de f . Pour les valeurs $x = a$ et $x = b$, nous obtenons les valeurs de $F(a)$ et de $F(b)$:

$$F(a) = \int_u^a f(t) dt \quad \text{et} \quad F(b) = \int_u^b f(t) dt$$

Calculons la différence $F(b) - F(a)$; en appliquant les règles données précédemment, nous obtenons :

$$\int_u^b f(t) dt - \int_u^a f(t) dt = \int_a^u f(t) dt + \int_u^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

D'où la règle :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

Conséquence : soit (C) la courbe représentant le graphe de la fonction f et soit F une fonction primitive de f , l'aire algébrique du domaine délimité par la courbe (C), la droite $x'x$, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $F(b) - F(a)$ (figure A.3, page suivante).

A.3.4. INTÉGRALE INDÉFINIE

Elle est définie par la fonction $F(x) = \int f(x) dx$.

A.3.5. RECHERCHE DES FONCTIONS PRIMITIVES D'UNE FONCTION DONNÉE

A.3.5.1. Fonctions primitives usuelles

Elles découlent des résultats donnés précédemment concernant les dérivées (§ A.1.2 à A.1.7).

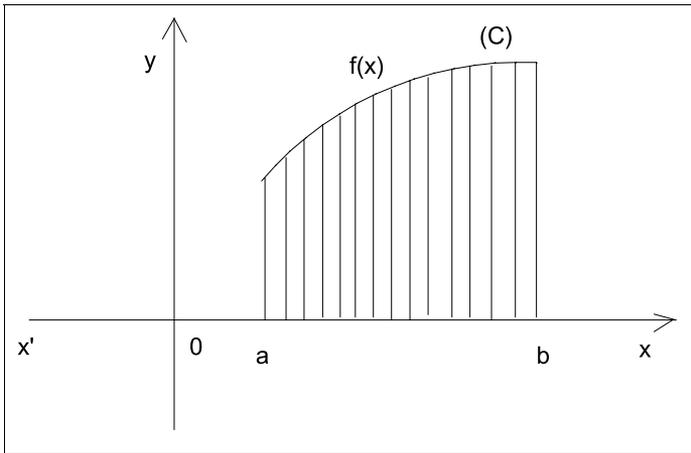


Figure A.3. Aire algébrique du domaine délimité par la courbe (C).

• **Fonctions définies sur l'ensemble des nombres réels**

Le tableau A.1 donne les primitives correspondant aux fonctions usuelles, C représentant la constante d'intégration.

• **Fonctions définies sur un intervalle ne comprenant pas la totalité des réels**

Le tableau A.2, page suivante donne les primitives des fonctions usuelles dans ce cas.

• **Autres intégrales**

$$\int \frac{dx}{x} = \text{Log } x, \quad \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{x-1}{x+1}, \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \text{Log} \frac{x-a}{x+a}$$

Fonction	Fonction primitive correspondante
$f(x) = 0$	$F(x) = C$
$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$
$f(x) = x''$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \in \mathcal{N}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$

Tableau A.1. Primitives de fonctions définies pour l'ensemble des réels.

Fonction	Fonction primitive correspondante
Pour $x \neq 0$: $f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{-1}{x} + C$
Pour $x > 0$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$
Pour x rationnel, et $x \neq -1$: $f(x) = x^m$	$F(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
Pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$: $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = \tan x + C$
Pour $x \neq k\pi$: $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$	$F(x) = -\cot x + C$

Tableau A.2. Primitives de fonctions définies pour un sous-ensemble des réels.

De même que pour le calcul des dérivées (cf. § A.1.4), on peut déduire de ces intégrales usuelles une infinité d'autres intégrales en remplaçant x par une fonction arbitraire $u(x)$.

Par exemple :

$$\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$$

$$\text{Soit à calculer : } \int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}$$

Posons $u = x^2 + 1$. On a $du = 2x dx$ et l'intégrale peut s'écrire :

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} \int u^{-2} du = \frac{1}{2} \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2(x^2 + 1)}$$

D'une façon générale, il est opportun de vérifier les calculs en calculant les dérivées des fonctions obtenues par intégration.

A.3.5.2. Intégration par parties

Elle est fondée sur la formule :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Exemple : calculer $\int \text{Log } x \cdot x''' dx$.

Posons $u = \text{Log } x$, $dv = x^m dx$, d'où $v = x^{m+1}/(m+1)$ ($m \neq -1$).

L'application de la formule ci-dessus donne :

$$\int \text{Log } x \cdot x''' dx = \text{Log } x \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} - \int \frac{1}{x} \frac{x^{m+1}}{m+1} dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{Log } x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$$

A.3.6. AIRE D'UNE SURFACE PLANE

Nous avons vu, (cf. § A.2, figure A.2, page 150), la représentation géométrique du nombre :

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Nous allons illustrer cette définition par un exemple : considérons la parabole définie par $f(x) = x^2/2$ et calculons l'aire hachurée sur la figure A.4.

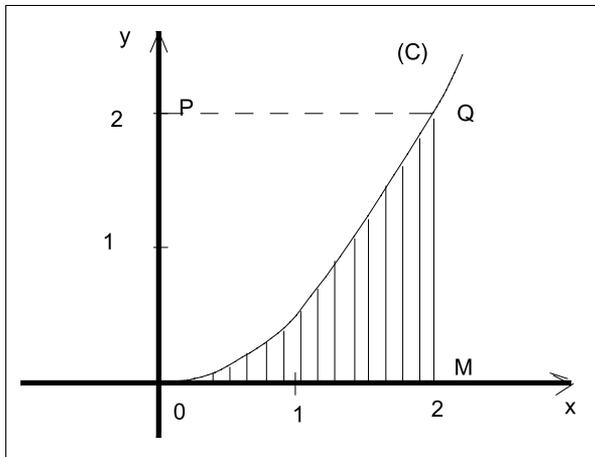


Figure A.4. Courbe parabolique.

L'aire du domaine OMQP est égale à :

$$A = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{8}{6} - 0 = \frac{4}{3} \text{ d'unité d'aire.}$$

L'aire définie par la parabole est donc le tiers de l'aire du carré OMQP.

A.4. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Soit une fonction f définie par $y = f(x)$; la dérivée première f' est telle que $y' = f'(x)$ et la dérivée seconde est telle que $y'' = f''(x)$.

On appelle **équation différentielle** une relation de la forme : $H(x, y, y', y'') = 0$.

L'équation est du *premier ordre* si la seule dérivée qui intervienne est la dérivée première; elle est du *second ordre* si les deux seules dérivées qui interviennent sont y' et y'' . Dans ce dernier cas, y'' peut intervenir sans la présence de y' .

En résistance des matériaux, on trouve des équations différentielles du second ordre dans le calcul des flèches.

Une équation différentielle étant donnée, *intégrer* (ou résoudre) cette équation différentielle, c'est chercher l'**ensemble des fonctions** qui la satisfont. Chacune de ces fonctions est une **solution** ou **intégrale particulière** de l'équation différentielle. L'ensemble des solutions est généralement nommé **intégrale générale** de l'équation différentielle.

L'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre dépend d'une constante arbitraire (que l'on peut généralement déterminer par *une condition aux limites*).

L'intégrale générale d'une équation différentielle du second ordre dépend de deux constantes arbitraires.

A.4.1. ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE

- Équations différentielles du type $y' = P(x)$ où $P(x)$ est une fonction polynôme. La solution est immédiate : c'est l'ensemble des primitives de $P(x)$.
- Équations différentielles du type $y' = ay$, où a est un réel donné. On peut écrire, pour y non nul : $y'/y = a$, soit une solution : $\text{Log } y = ax + C$, ou encore, en écrivant $C = \text{Log } K$, $\text{Log } y - \text{Log } K = ax$, ou $y = Ke^{ax}$.

A.4.2. EXEMPLES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

- Équations différentielles du type $y'' = P(x)$ où P est une fonction polynôme. C'est le type rencontré le plus souvent lors du calcul des flèches, en résistance des matériaux.

On calcule d'abord la dérivée première y' :

$$y' = \int P(x) dx = Q(x) + C_1 \quad Q(x) \text{ est également un polynôme.}$$

$$y = \int (Q(x) + C_1) dx = R(x) + C_1x + C_2$$

L'intégrale générale comporte deux constantes arbitraires, comme nous l'avons déjà annoncé au début de ce chapitre.

- Équations différentielles du type $y'' + \omega^2 y = 0$.
On trouve ce type d'équations dans le calcul du flambement. L'intégrale générale de cette équation est l'ensemble des fonctions :

$$F(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$$

Symboles et notations

B

ANNEXE

Ci-après sont répertoriés les symboles et notations utilisés dans ce livre, avec les unités correspondantes, tant en Système International qu'en unités usuelles, lorsqu'elles sont différentes. Nous indiquons également les références aux paragraphes où ils sont utilisés pour la première fois.

Tableau des symboles et de leurs unités				
Symbole	Désignation	Paragraphe	Unité SI	Unité usuelle
Majuscules romaines				
C	Moment de torsion	4.3.2	mN	mdaN
E	Module de Young	3.3	N/m ²	hb ou MPa
F	Force	1.1.1.2	N	daN
G	Centre de gravité	2.3	-	-
I/xx'	Moment d'inertie par rapport à un axe xx'	2.2	m ⁴	cm ⁴
I/v	Module d'inertie pris par rapport à la fibre supérieure	2.3	m ³	cm ³
I/v'	Module d'inertie pris par rapport à la fibre inférieure			
L	Longueur d'un élément	3.2	m	m ou cm

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Symbole	Désignation	Paragraphe	Unité SI	Unité usuelle
M	Moment de forces	1.1.2	mN	mdaN
M_w	Valeur absolue du moment fléchissant sur l'appui de gauche d'une travée continue	9.6.1.2	mN	mdaN
M_e	Valeur absolue du moment fléchissant sur l'appui de droite d'une travée continue			
M_t	Moment fléchissant en travée			
N	Effort normal	4.3.2	N	daN
P	Poids, charge concentrée	1.1.1.3	N	daN
R	Résultante de forces, réaction	1.1.1.2	N	daN
R	Rayon d'un cercle	1.1.2.1	m	m ou cm
S	Surface	2.1	m ²	m ² ou cm ²
T	Effort tranchant	4.3.2	N	daN
Z	Bras de levier du couple des forces internes à une section	6.2	m	m ou cm
Minuscules romaines				
a	Distance à l'origine d'une charge concentrée	4.3.2	m	m ou cm
b	Largeur d'une section	2.3	m	m ou cm
b	Nombre de barres d'un système réticulé	10.1	-	-
d	Distance entre deux axes	2.1	m	m ou cm
d	Diamètre d'un cercle	2.3	m	m ou cm
e	Épaisseur d'une pièce métallique (tôle, plat, etc.)	6.3	m	cm
h	Hauteur d'une pièce rectangulaire	2.3	m	m ou cm
k	Coefficient de sécurité au flambement	11.4.1	-	-
ℓ	Longueur d'une travée de poutre entre deux appuis	4.3.3	m	m

Symbole	Désignation	Paragraphe	Unité SI	Unité usuelle
m	Coefficient numérique de flambement	11.3.2	-	-
m(S)	Moment statique d'une surface	2.1	m ³	m ³ ou cm ³
m(x)	Dans une poutre continue, moment fléchissant sur une travée supposée sur appuis simples	9.2	mN	mdaN
n	Nombre de nœuds d'un système réticulé	10.1	-	-
p	Intensité d'une force uniformément répartie	4.2	N/m	daN/m
r	Rayon de giration d'une poutre	11.3.3	m	m ou cm
s	Surface élémentaire	2.1	-	-
t	Contrainte tangentielle	3.2	N/m ²	daN/cm ²
t(x)	Dans une poutre continue, effort tranchant sur une travée considérée sur appuis simples	9.2	N	daN
t _y , t _z	Contraintes de cisaillement	6.1	N/m ²	daN/cm ²
v	Distance de l'axe neutre à la fibre extrême supérieure	2.3	m	m ou cm
v'	Distance de l'axe neutre à la fibre extrême inférieure			
x	Abscisse d'une section de poutre	8.1	m	m ou cm
y	Distance verticale à l'axe neutre d'une fibre de poutre	2.3	m	m ou cm
y(x)	Déplacement vertical de la fibre déformée	8.1.6	m	cm ou mm
y'	Dérivée de y (pente de la déformée)	8.1.6	-	-
y''	Dérivée seconde de y	8.1.6	-	-
Minuscules grecques				
α	Rapport des charges d'exploitation à la somme des charges	9.5	-	-

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Symbole	Désignation	Paragraphe	Unité SI	Unité usuelle
ϵ	Allongement relatif	3.3	-	%
λ	Élancement d'une poutre	11.3.3	-	-
σ σ'	Contrainte normale de traction Contrainte normale de compression	3.2	N/m^2 (ou Pa)	MPa, bar, hb
σ_e	Limite élastique d'un métal	3.2	N/m^2 (Pa)	MPa, hb
σ'_k	Contrainte critique d'Euler	11.3.3	N/m^2 (Pa)	MPa, hb
ν	Coefficient de Poisson	3.3	-	-

Achevé d'imprimer
N° d'éditeur : 8186
papier

